MEGOLDÁSOK
Pontszerző Matematikaverseny 2020/2021 tanév
IV. forduló

1. feladat:

Islandia szigetvilágában hajókkal szállítják a rakományt a szigetek között. (Lásd ábra.) Az A nevű szigetről kell elszállítani a rakományt a D nevű szigetre (kezdetben csak az A jelű szigeten van áru). Minden hajó csak megadott mennyiségű árut szállíthat és csak egyetlen utat tehet meg, az ábrán nyíllal jelölt irányban. A rakomány mennyiségét és a hajóutat az ábra is jelöli.

Pl.: A képen látható hajó a C és B sziget között közlekedik (C-ből megy B-be) és legfeljebb 6 tonna árut képes szállítani. A hajóutak irányát az ábrára rajzolt nyilak is szemléltetik. A hajó nem haladhat a nyíllal ellentétes irányba.

Az A szigeten 40 tonna elszállítandó áru van. A cél az, hogy a D szigetre minél több áru eljusson, viszont az az áru, amit nem tudnak a hajók elszállítani az A szigeten kell, hogy maradjanak.

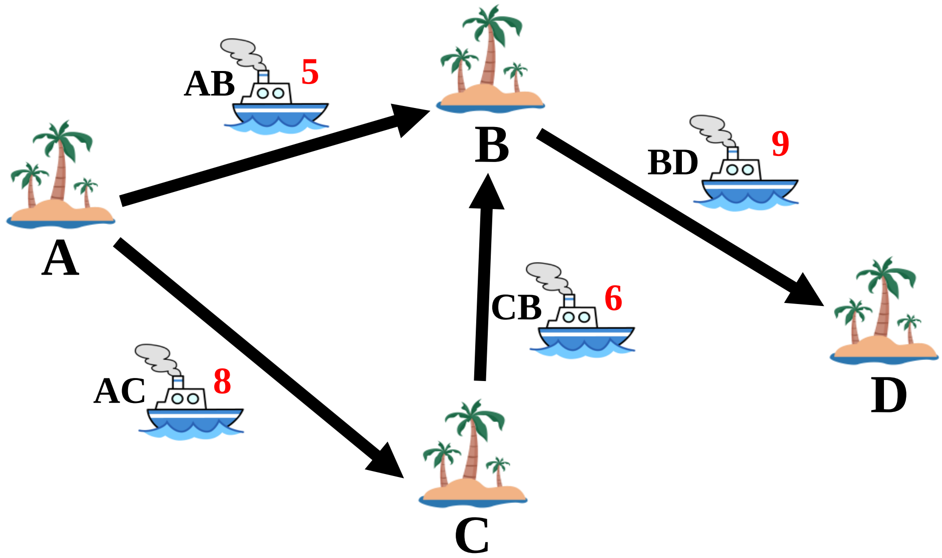
A szállítási útvonalakat és mennyiségeket kell a megoldás során megadni.

Például az alábbi ábrán a következő szállítási útvonalakkal lehet a legtöbb árut elszállítani:

1. szállítás: A-ból B-be 5 tonna (B-ben 5 tonna áru lesz, A-ban 35 tonna maradt)
2. szállítás: A-ból C-be 4 tonna (C-ben 4 tonna áru lesz, A-ban 31 tonna maradt)
3. szállítás: C-ből B-be 4 tonna (B-ben 9 tonna áru lesz)
4. szállítás: B-ből D-be 9 tonna (D-be 9 tonna áru érkezett)

Így a szállítások végén B-ben és C-ben nincs áru. Az A-ban a kezdeti 40 tonnából 31 tonna maradt és D-be 9 tonna áru érkezett.

A szállítások közül néhány sorrendje felserélhető. (Például az 1. és 2.)

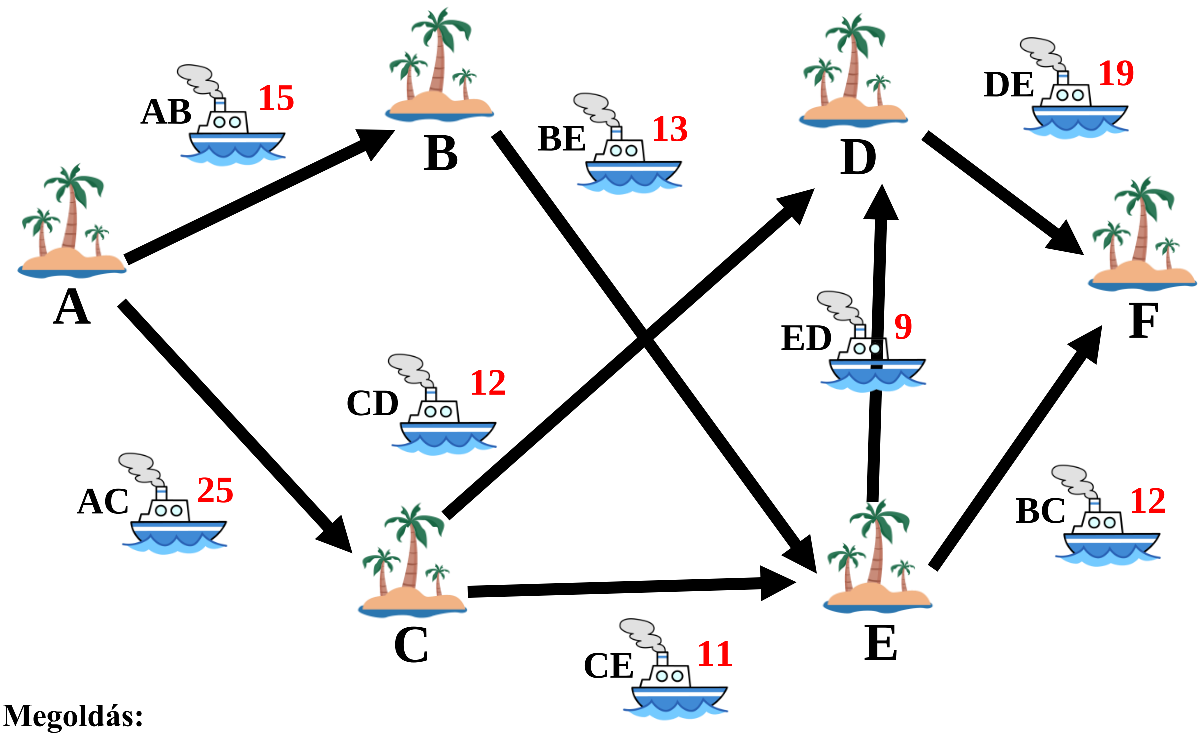


A feladat, hogy az alábbi térképnek és fenti szabályoknak megfelelően a lehető legtöbb árut szállítsd el A-ból F-be úgy, hogy a szállítás végén B-ben, C-ben, D-ben és E-ben ne legyen áru.

- **a) Add meg a fenti példának megfelelően a szállítási útvonalakat és a szállított mennyiségeket!**
- **b) Mennyi áru lesz a szállítás végén F-ben?**
- **c) Mennyi áru maradt a szállítás végén A-ban?**

Kezdetben az A szigeten 40 tonna áru van.

A térkép:



Megoldás:
Például egy lehetséges megoldás:

a) (*Egyes szállítások sorrendje felcserélhető.*)

1. szállítás: A-ból B-be 10 tonna (A-ban marad 30 tonna, B-ben lesz 10 tonna)
2. szállítás: A-ból C-be 21 tonna (A-ban marad 9 tonna, C-ben lesz 21 tonna)
3. szállítás: C-ből D-be 12 tonna (C-ben marad 9 tonna, D-ben lesz 12 tonna)
4. szállítás: B-ből E-be 10 tonna (B-ben marad 0 tonna, E-ben lesz 10 tonna)
5. szállítás: C-ből E-be 9 tonna (C-ben marad 0 tonna, E-ben lesz 19 tonna)
6. szállítás: E-ből D-be 7 tonna (E-ben marad 12 tonna, D-ben lesz 19 tonna)
7. szállítás: E-ből F-be 12 tonna (E-ben marad 0 tonna, F-ben lesz 12 tonna)
8. szállítás: D-ből F-be 19 tonna (D-ben marad 0 tonna, F-ben lesz 31 tonna)

Minden jó megoldás 1 pont. Maximum 8 pont.

b) 31 tonna *1 pont*

c) 9 tonna *1 pont*

Összesen: 10 pont

2. feladat:

A matematikusok sok esetben használnak érdekes elnevezéseket különböző számokra, amelyek rendelkeznek valamilyen különleges tulajdonsággal. A korábbi feladatsorokban ilyen elnevezés volt a *„tökéletes szám", „boldog szám"* is. Ebben a feladatban egy újabb elnevezéssel ismerkedhetsz meg. Ez a *„vámpír szám"* fogalma.

A vámpír számok olyan számok, amelyek előállíthatók két másik szám szorzataként úgy, hogy a szorzótényezők számjegyei megegyeznek az eredeti szám jegyeivel, a sorrendtől függetlenül. Tehát a szorzatban és a szorzótényezőkben pontosan ugyanazok a számjegyek szerepelnek.

Például:

$124483 = 281 \cdot 443$

A szorzótényezőkben és az eredményben is pontosan ugyanaz a hat számjegy szerepel: 1; 2; 4; 4; 8; és a 3. Igaz, hogy nem ugyanabban a sorrendben, de ezt megengedi a szabály. Tehát az 124483 vámpír szám.

Feladatok:

a) Tudjuk, hogy az 1827 is vámpír szám. Határozd meg a két szorzótényezőt, amely szorzataként előállítható!

b) Tudjuk, hogy az 1260 is vámpír szám. Határozd meg a két szorzótényezőt, amely szorzataként előállítható!

Megoldás:

a) Az 1827 szorzótényezőinek az utolsó számjegye csak 1 és 7 lehet,
(3, 9 nem, mert nincs a szám számjegyei között)

Kétjegyű számok esetén a másik két számjegy 2 és 8. Két lehetőség van: 81, 27, vagy 21, 87.
Ellenőrzés:
81x27 = 2187 $\neq$ 1827 (Megjegyzés: a 2187 is vámpír szám.)
87x21 = 1827.
Ha az egyik tényező 7, a másik csak 281 lehet,
ekkor 281x7 = 1967, nem megoldás.

5 pont

b) Az 1260 szorzótényezői egyikének az utolsó számjegye 0.
Kétjegyű párban csak a **21x60 = 1260** lehet.
Három és egyjegyű is lehet **210x6 = 1260.**

5 pont

Megjegyzés: Ha csak a szorzatokat írja fel, akkor 2-2-2 pontot kapjon.

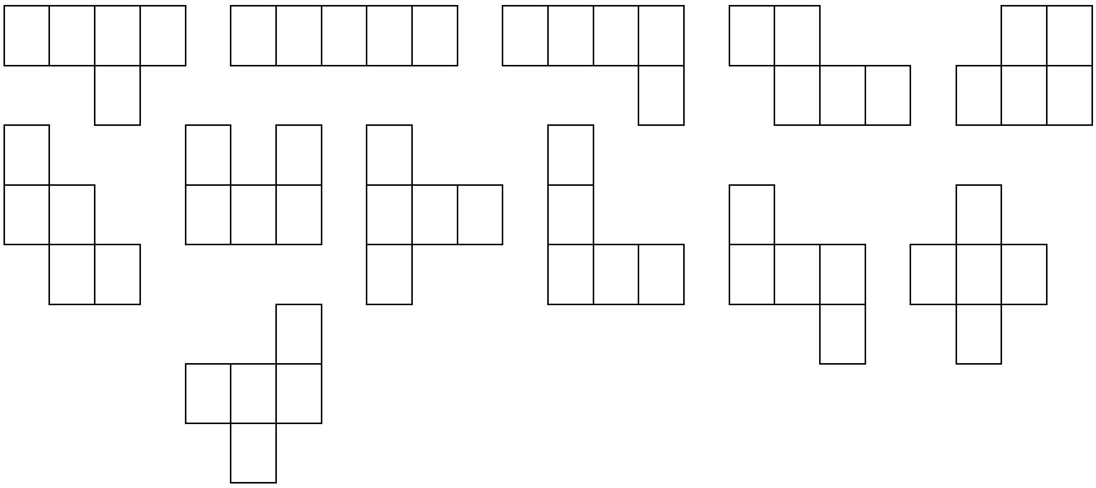
Összesen: 10 pont

3. feladat:

A II. fordulóban elkészítettétek az összes pentaminót (lásd ábra). Egyet felrajzoltunk a feladat után.

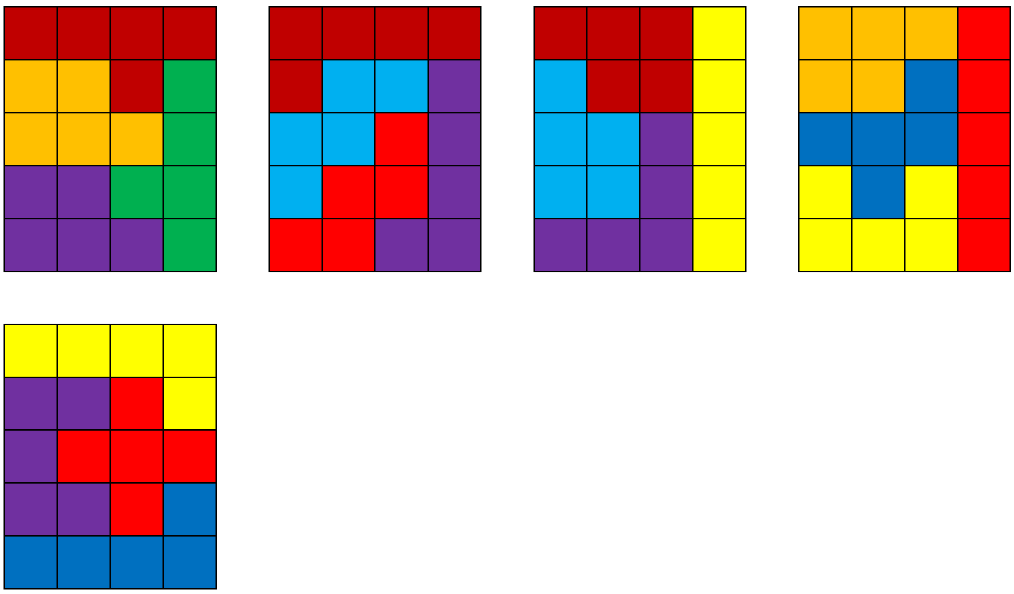
a) Fedd le az 5×4-es téglalapot hézagmentesen, átfedés nélkül úgy, hogy a lefedő pentaminók között legalább két különböző legyen. Öt különböző megoldást készíts! Rajzokkal válaszolj!

b) Ki lehet-e rakni az összes pentaminó egyszeri felhasználásával egy téglalapot? Rajzzal indokolj!



Megoldás:

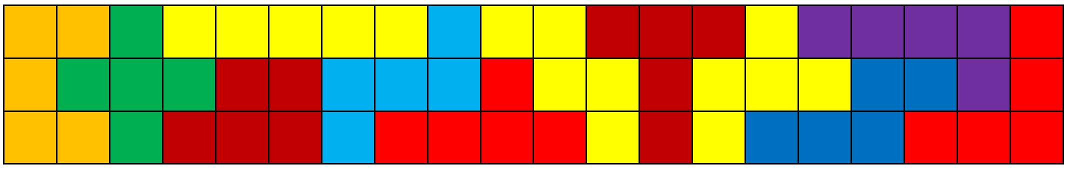
a) pl. 5 megoldásra:



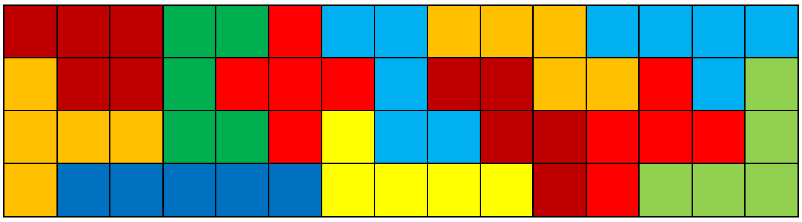
*Minden jó megoldás 2 pont, összesen:*10 *pont*

b) Mivel a 12 pentaminó területe összesen 60, ezért, ha egy téglalap kirakható velük, akkor a téglalap mérete: **3×20**-as, **4×15**-ös, **2×30**-as, **5×12**-es vagy **6×10**-es lehet.

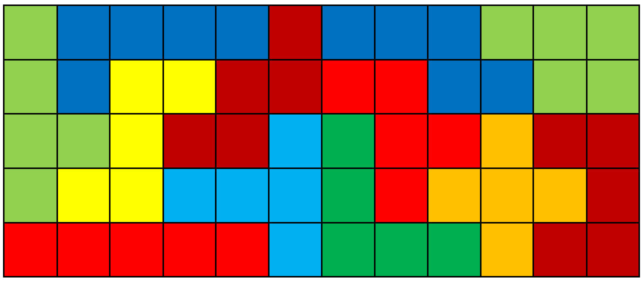
kirakható, pl.: 3×20-as



kirakható, pl.: 4×15-ös



kirakható, pl.: 5×12-as

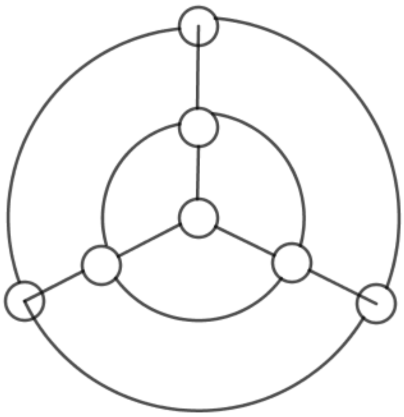


Minden jó megoldás:5 pont

Összesen: 25 pont

4. feladat:

Helyezd el az ábra kisköreibe az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokat úgy, hogy mindegyik egyenesen és mindegyik körön 12 legyen az ott álló három szám összege. A hét kör mindegyikébe pontosan egyet írunk a hét szám közül. Milyen szám állhat a legbelső kiskörben? Válaszod indokold!

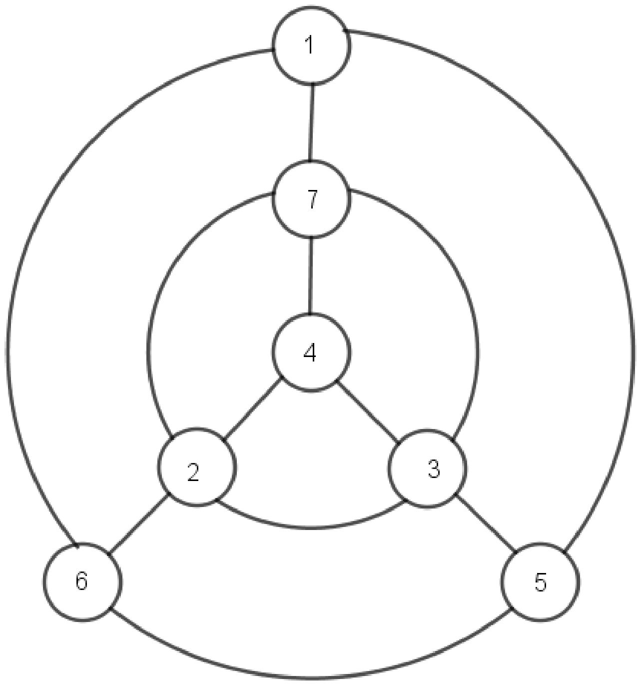


Megoldás:

A két körön lévő számok összege 12-12, ami összesen 24. *3 pont*

A hét szám összege 28, így a középső kiskörbe csak a 4-es szám kerülhet. *3 pont*

Egy megoldást mutat az alábbi ábra.



Egy jó megoldás mutatása 5 pont. (A 4-en kívül beírt 5 jó számért.)

Összesen: 11 pont

5. feladat:

Egy gyufásdobozban néhány gyufaszál van. Első lépésben megduplázzuk a dobozban lévő gyufaszálak számát és a duplázás után a dobozból kiveszünk 16 gyufaszálat. Második lépésben megduplázzuk a dobozban lévő gyufaszálak számát és a duplázás után a dobozból kiveszünk 16 gyufaszálat. Harmadik lépésben megduplázzuk a dobozban lévő gyufaszálak számát és a duplázás után a dobozból kiveszünk 16 gyufaszálat, és ez után a dobozban nem maradt gyufaszál. Hány gyufaszál volt kezdetben a dobozban? Válaszod indokold!

Megoldás:

Gondolkozzunk visszafele:

A harmadik lépésben a duplázás után 16 gyufaszál lett, mivel 16-ot elvéve a dobozban nem maradt gyufa. *4 pont*

Ezek alapján a második lépés után 8 szál maradt a dobozban. A 16 szál kivétele előtt 24 szál volt a dobozban, ami a duplázás eredménye. *3 pont*

Tehát az első lépés befejezése után 12 szál gyufa volt a dobozban, így a kivétel előtt 28 szál volt a dobozban, ezért eredetileg, a duplázás előtt 14 szál gyufa volt a dobozban. 4 *pont*

Összesen: 11 pont