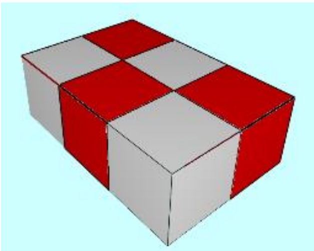
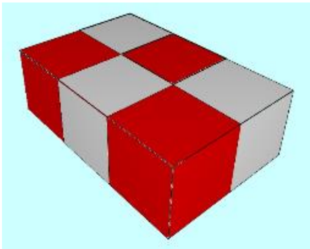
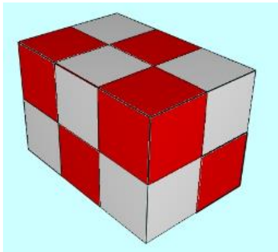
III. FORDULÓ
MEGOLDÁSOK

1. feladat

Tamásnak 12 egyforma méretű építőkockája van, 6 piros és 6 fehér. Három fehér és három piros kockából kirakta az 1. ábrán látható testet, majd a megmaradt 6 kockából a 2. ábrán látható testet. Végül a két testet egymásra illesztette úgy, amint a 3. ábrán látható.


1. ábra


2. ábra


3. ábra

Figyeld meg a 3. ábrát, majd válaszolj a kérdésekre!

a) Hány piros oldallap érintkezik fehér oldallappal? (Két oldallap érintkezik, ha fedik egymást.)
b) Hány piros él érintkezik fehér éllel? (Két él érintkezik, ha van legalább két közös pontjuk.)
c) A piros kockák csúcsai közül összesen hány érintkezik a fehér kockák csúcsaival?

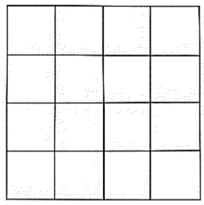
Megoldás:

a) - Az alsó ábrán látható testben 20 piros oldallap érintkezik fehér oldallappal. - Az alsó szinten (1. ábra) a sarkokban található piros kockáknak a szomszédja 2-2 fehér kocka, így 4 piros lap érintkezik fehér lappal, a középen található piros kocka három oldallapja érintkezik egy-egy fehér kocka oldallapjával. Tehát az alsó szinten 7 piros oldallap érintkezik fehér oldallappal. - A második szinten (2. ábra) a sarkokban található piros kockáknak a szomszédja 2-2 fehér kocka, így 4 piros lap érintkezik fehér lappal, a középen található piros kocka három oldallapja érintkezik egy-egy fehér kocka oldallapjával. Tehát az alsó szinten 7 piros oldallap érintkezik fehér oldallappal. - A két test egymásra helyezése következtében (3. ábra) az első test mind a hat kockája egy-egy más színű kockára kerül, tehát így újabb 6 piros lap érintkezik fehér lappal.	**4 pont:** ***1p.*** 20 piros oldallap ***1p.*** Az alsó szinten 7 piros oldallap érintkezik fehér lappal. ***1 p.*** A második szinten ugyancsak 7 piros oldallap érintkezik fehér lappal. ***1 p.*** A két test egymásra helyezése következtében 6 piros lap érintkezik fehér lappal.
b) - Az alsó szinten (1. ábra) a sarkokban található piros kockát 2 fehér kocka vesz körbe, egy ilyen piros kocka 7 éle érintkezik fehér éllel (a piros kocka két belső lapján található élek), tehát itt összesen 14 él van. A középen található piros kocka 10 éle érintkezik a fehér kocka élével (a piros kocka 12 éléből a külső oldallapon található alsó és felső él nem érintkezik fehér éllel), tehát ezen a szinten 24 piros él érintkezik fehér éllel.	**5 pont:** ***1 p.*** Az alsó szinten a sarokban található piros kockák 14 éle érintkezik fehér éllel. ***1 p.*** Az első szinten a középen található piros kocka 10 éle érintkezik a fehér kocka élével.

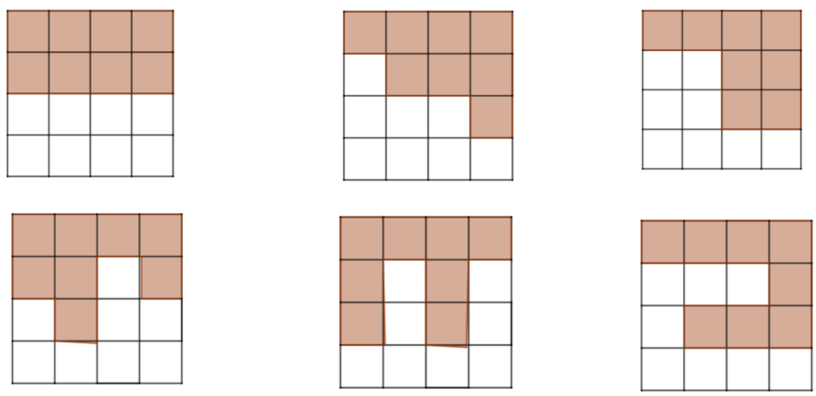
- A második szinten (2. ábra) - hasonlóan az első szinthez - szintén 24 piros él érintkezik fehér éllel. - A két test egymásra helyezése következtében újabb 10 piros él érintkezik fehér éllel. (Az alsó szinten a sarokban található piros kockák felső élei közül a két-két külső, a középen található piros kocka ugyancsak külső éle (2+2+1=5), és az alsó szinten található fehér kockák felső-külső élei is fognak érintkezni egy-egy piros éllel (2+2+1=5). - Tehát összesen 24+24+10=58 piros él érintkezik fehér éllel. **Vagy** Megszámláljuk, hogy a piros kockák hány éle nem érintkezik fehér éllel. A sarokban lévő piros kockák 3-3 éle nem érintkezik fehér éllel, valamint a középső piros kocka 1-1 éle. Azaz $3+3+3+3+2=14$ piros él nem érintkezik fehér éllel. Egy kockának 12 éle van, a hat piros kockának $6 \times 12 = 72$ éle van. Mivel 10 él nem érintkezik fehér éllel, ezért $72 - 14 = 58$ piros él érintkezik fehér éllel.	***1 p.*** A második szinten a sarkokban található piros kockák 14 éle érintkezik fehér éllel és a középen található piros kocka 10 éle érintkezik a fehér kocka élével. ***1 p.*** A két test egymásra helyezése következtében újabb 10 piros él érintkezik fehér éllel. ***1 p.*** 58 piros él érintkezik fehér éllel. ***Megj.*** *Ha más módszerrel, helyesen számolja meg az éleket, akkor maximális pontszámot kap.*
c) - Az alsó szinten a sarokban található piros kockát 2 fehér kocka vesz közre, egy ilyen piros kocka 6 csúcsa érintkezik fehér csúccsal (2 csúcs nem érintkezik, ezek a külső csúcsok), tehát itt összesen 12 csúcs van. A középen található piros kocka mind a 8 csúcsa érintkezik a fehér kocka valamely csúcsával, tehát ezen a szinten 20 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal. - A második szinten a ugyancsak 20 piros csúcs érintkezik fehér kocka egy-egy csúcsával. - A két test egymásra helyezése következtében újabb 4 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal. -Tehát összesen $20+20+4=44$ csúcs érintkezik fehér csúccsal. **Vagy** Megszámoljuk, hány piros csúcs nem érintkezik fehér csúccsal. Az alsó szinten a sarokban lévő piros kockák 1-1 csúcsa nem érintkezik fehér csúccsal, azaz 2 piros csúcs nem érintkezik fehérrel, és a második szinten a sarokban található piros kockák külső csúcsai nem érintkeznek fehér kocka csúcsával. Tehát 4 piros csúcs nem érintkezik fehér kocka csúcsával. Egy kockának 8 csúcsa van, a hat kockának $6 \times 8 = 48$ csúcsa van. Így $48 - 4 = 44$ piros csúcs érintkezik fehér csúccsal.	**5 pont:** ***1 p.*** Az első szinten a sarokban található piros kockák 12 csúcsa érintkezik fehér csúccsal. ***1 p.*** Az első szinten a középen található piros kocka 8 csúcsa érintkezik a fehér csúccsal. ***1 p.*** A második szinten a sarokban található piros kockák 12 csúcsa érintkezik fehér csúccsal és középső piros kocka 8 csúcsa érintkezik a fehér kocka egy-egy csúcsával. ***1 p.*** A két test egymásra helyezése következtében újabb 4 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal. ***1 p.*** 44 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal. ***Megj.*** *Ha más módszerrel helyesen számolja meg a csúcsokat, akkor maximális pontszám jár.*
Felelet: Az ábrán látható testben 20 piros oldallap érintkezik fehér oldallappal, 58 piros él érintkezik fehér éllel és 44 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal.	**1 p. helyes felelet**
	Összpontszám: 15 pont

2. feladat

Egy 4x4-es négyzetet két azonos alakú és területű részre darabolunk fel a rácsvonalak mentén minél többféleképpen. Hányféleképpen lehetséges ez? (Két megoldás különbözik, ha elforgatva a darabolás során kapott alakzatokat, azok nem fedik egymást.)



Megoldás:

Hatféleképpen darabolható fel a 4x4 -es négyzet két azonos alakú és területű részre. Az alábbi ábrák szemléltetik a lehetséges megoldásokat: 	**10 pont:** ***2x1p***. Két ábra elkészítése. ***4x2p***. Újabb négy ábra elkészítése.
Felelet: Hatféleképpen darabolható fel a 4x4-es négyzet két azonos alakú és területű részre.	**1 p. helyes felelet**
	Összpontszám: 11 pont

3. feladat

Gondoltam egy kétjegyű számra, a számjegyeit felcseréltem, majd az így kapott szám felét növeltem a legnagyobb és a legkisebb kétjegyű számok különbségével, így eredményül a legkisebb különböző számjegyekből álló háromjegyű számot kaptam. Melyik számra gondoltam? Válaszod indokold!

Megoldás:

A kétjegyű szám, amelyre gondoltam $\overline{ab}$, számjegyeit felcseréltem, így most $\overline{ba}$ számom van. A legnagyobb kétjegyű szám 99, míg a legkisebb 10. Ezek különbsége $99 - 10 = 89$ A legkisebb háromjegyű szám, amelynek számjegyei különbözőek a 102. A fordított út módszerét alkalmazva: mivel $\overline{ba}$ szám feléhez hozzáadtam a 89-et és eredményül 102-t kaptam, ezért a 102-ből kivonom a 89-et → $102 - 89 = 13$ Ez a $\overline{ba}$ szám fele, így a 13-t megszorzom 2-vel → $13 \times 2 = 26$ Vagyis $\overline{ba} = 26$.	**9 pont:** ***1p.*** Felírja a kétjegyű számot és felcseréli a számjegyeit. ***1p.*** Felírja a legnagyobb és a legkisebb kétjegyű számot. ***1p.*** Kiszámítja a számok különbségét. ***1p.*** Felírja a legkisebb háromjegyű számot, amelynek számjegyei különbözőek. ***2p.*** Megindokolja és helyesen kiszámolja a $\overline{ba}$ szám felét. ***2p.*** Megindokolja és helyesen kiszámolja $\overline{ba}$ számot.

<table>
<tr><td>Felcserélem a szám számjegyeit, $\overline{ab} = 62$.
Tehát a 62-re gondoltam.

Vagy műveletsorral:
$\overline{ba}: 2 + (99 - 10) = 102$
$\overline{ba}: 2 + 89 = 102$
$\overline{ba}: 2 = 102 - 89$
$\overline{ba}: 2 = 13$
$\overline{ba} = 13 \times 2$
$\overline{ba} = 26$
Felcserélem a szám számjegyeit, $\overline{ab} = 62$.</td><td>1p. Felcseréli a számjegyek sorrendjét.

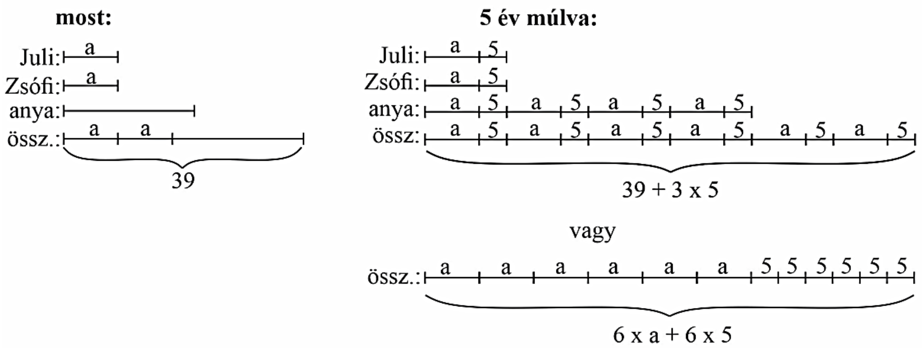
Ha műveletsorral oldja meg:
3p. a műveletsor helyes felírása
5p. műveletek helyes sorrendben és helyesen való elvégzése
1p. a számjegyek felcserélése</td></tr>
<tr><td>Felelet: A gondolt szám 62.</td><td>1p. helyes felelet</td></tr>
<tr><td></td><td>Összpontszám: 10 pont</td></tr>
</table>

4. feladat

Édesanya és két ikerlánya - Juli és Zsófi - éveinek száma összesen 39 év. Öt év múlva édesanya kétszer annyi idős lesz, mint az ikrek együtt.

Hány éves most édesanya? Hány évesek most az ikrek? Írd le lépésről-lépésre, hogyan gondolkodtál!

Megoldás:

<table>
<tr><td>


Jelöljük az ikrek éveit a-val.

Ki kell számítanunk, hogy mennyi édesanya és az ikrek éveinek száma 5 év múlva: $39 + 3 \times 5 = 39 + 15 = 54$ év

Az ikrek életkora 5 év múlva: $54 : 6 = 9$ év
Az ikrek életkora most: $9 - 5 = 4$ év

Édesanya életkora 5 év múlva: $(9 + 9) \times 2 = 36$ év
Édesanya életkora most: $36 - 5 = 31$ év
Vagy:
Jelöljük az ikrek éveit a-val.
Ki kell számítanunk, hogy mennyi édesanya és az ikrek éveinek száma 5 év múlva: $39 + 3 \times 5 = 39 + 15 = 54$ év
$6 \times a + 6 \times 5 = 54$
$6 \times a = 54 - 30$
$6 \times a = 24$
$a = 24 : 6$
$a = 4$
Édesanya életkora most: $39 - 2 \times 4 = 31$ év
</td><td>8 pont

2p. helyesen elkészített ábra

2p. édesanya és az ikrek együttes életkorának kiszámítá-sa 5 év elteltével

2p. az ikrek életkorának kiszámítása

2p. édesanya életkorának kiszámítása

Bármilyen más helyes megoldás elfogadható.</td></tr>
</table>

Vagy: Jelöljük az ikrek éveit a-val. Ki kell számítanunk, hogy mennyi édesanya és az ikrek éveinek száma 5 év múlva: $39 + 3 \times 5 = 39 + 15 = 54$ év Az ikrek életkora most: $(54 - 6 \times 5): 6 = 24: 6 = 4$ év Édesanya életkora 5 év múlva: $(9 + 9) \times 2 = 36$ év Édesanya életkora most: $36 - 5 = 31$ év vagy $39 - 2 \times 4 = 31$ év	
Felelet: Édesanya: 31 éves, az ikrek 4 évesek	**1p. helyes felelet**
	Összpontszám: 9 pont

5. feladat

Bolyai János 1802. december 15-én született Kolozsváron.

A nagy matematikus születési évét jelölő szám a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- Négy különböző számjegyből áll.
- A számjegyeinek összege 11.
- A számjegyeinek szorzata 0.
- A százasokat jelölő számjegy nagyobb a tízeseket jelölő számjegynél és mindkettő páros.

Hány olyan négyjegyű szám létezik, amely a fenti tulajdonságokkal rendelkezik? Sorold fel, melyek ezek!

Írd le lépésről-lépésre, hogyan gondolkodtál!

Megoldás:

Bolyai János születésének éve: **1802**. $\overline{abcd}$ = ? ha tudjuk, hogy: $a \neq b \neq c \neq d$; $a + b + c + d = 11$; $a \times b \times c \times d = 0$; $b > c$; $b, c = 2n$ (páros számok) Ahhoz, hogy négyjegyű ($\overline{abcd}$ alakú) számokat tudjunk felírni, az ezreseket jelölő számjegy nem lehet 0 ($a \neq 0$) Ahhoz, hogy *b* nagyobb legyen, mint *c*, *b* nem lehet egyenlő 0-val. $b \neq 0$ Ahhoz, hogy $a \times b \times c \times d = 0$, c vagy d egyenlő kell legyen 0-val. Jó lenne valamilyen szabály szerint felírni a számokat. Pl. 1. Ha $a = 1$ $b + c + d = 10$, mert $10 + 1 = 11$ $b > c$; c vagy $d = 0$; $b, c = 2n$ **1802; 1820; 1604; 1640; 1406; 1208 – 6 szám** 2. Ha $a = 2$ $b + c + d = 9$, mert $9 + 2 = 11$ $b > c$; c vagy d = 0; b, c = 2n	**11 pont:** **1p.** annak indokolása, hogy az ezresek számjegye nem lehet 0 **1p.** annak indoklása, hogy a százasok számjegye nem lehet 0 **1p.** annak indokolása, hogy a tízesek vagy az egyesek számjegye 0 kell legyen **1p.** a számok kiválasztásának valamilyen módon való indoklása **0,25p.** Az első 10 helyesen felírt szám 0,2 x 10 = **2 pont**. **0,5p.** A további 10 szám felírására 0,5 x 10 = **5 pont**.

2405; 2603; 2801 – 3 szám 3. Ha $a = 3$ $b + c + d = 8, mert\ 8 + 3 = 11$ $b > c;$ $c\ vagy\ d = 0;\ b, c = 2n$ **3206; 3620; 3602 – 3 szám** 4. Ha $a = 4$ $b + c + d = 7, mert\ 7 + 4 = 11$ $b > c;\ c\ vagy\ d = 0;\ b, c = 2n$ **4205; 4601 – 2 szám** 5. $Ha\ a = 5$ $b + c + d = 6, mert\ 6 + 5 = 11$ $b > c;\ c\ vagy\ d = 0;\ b, c = 2n$ **5204; 5420; 5402 – 3 szám** 6. Ha $a = 6$ $b + c + d = 5, mert\ 5 + 6 = 11$ $b > c;\ c\ vagy\ d = 0;\ b, c = 2n$ **6203; 6401 – 2 szám** 7. Ha $a = 7$ $b + c + d = 4, mert\ 4 + 7 = 11$ $b > c;\ c\ vagy\ d = 0;\ b, c = 2n$ **Nincs megoldás, mert nem létezik két olyan 0-tól különböző páros szám, amelynek összege 4** 8. Ha $a = 8$ $b + c + d = 3, mert\ 3 + 8 = 11$ $b > c;\ c\ vagy\ d = 0;\ b, c = 2n$ **8201 - 1 szám** 9. Ha $a = 9$ $b + c + d = 2, mert\ 2 + 8 = 11$ $b > c;\ c\ vagy\ d = 0;\ b, c = 2n$ **Nincs megoldás, mert nem létezik két olyan 0-tól különböző páros szám, amelynek összege 2** Összesen: $6 + 3 + 3 + 2 + 3 + 2 + 1 = 20$ olyan szám létezik, amelynek tulajdonságai megegyeznek Bolyai János születési évét jelölő szám (1802) tulajdonságaival. Ezek a számok a következők: **1802; 1820; 1604; 1640; 1406; 1208; 2405; 2603; 2801; 3206; 3602; 3620; 4205; 4601; 5204; 5420; 5402; 6203; 6401; 8201**	
Felelet: 20 olyan szám létezik, amelynek tulajdonságai megegyeznek Bolyai János születési évét jelölő szám (1802) tulajdonságaival.	**1p.** helyes felelet
Összpontszám: 12 pont	