Országos Magyar Matematika Olimpia 2019
Megyei szakasz, 2019. január 26.
VI. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adott a $P=\{a,b,c,d\}$ halmaz. Határozd meg a halmaz elemeinek számértékét, ha a következő tulajdonságok egyidőben teljesülnek:

a) $\{a,b,6\}\cap\{b,c,3\}=\{b,3\}$;

b) $\{a,b,7\}\subset P$;

c) $\{b,c,9\}\subset P$;

d) $\{b,c,d\}\cup\{a,5\}=\{a,c,d,5\}$.

(Matlap)

2. Feladat (10 pont)

Adottak az AOB, BOC, COD és DOE egymás melletti szögek úgy, hogy az A, O és E pontok kollineárisak. Tudjuk, hogy $AOB\sphericalangle=\frac{1}{5}\cdot BOC\sphericalangle$, $COD\sphericalangle=4\cdot AOB\sphericalangle$ és $DOE\sphericalangle=2\cdot AOB\sphericalangle$.

a) Számítsd ki az AOB, BOC, COD és DOE szögek mértékét!
b) Igazold, hogy $OC\perp AE$!
c) Határozd meg az AOC és BOD szögek szögfelezői által alkotott szög mértékét!

3. Feladat (10 pont)

Három hajó január elsején egyidőben indul ugyanabból a kikötőből. Az első hajó oda-vissza útja 27 napig tart, majd 3 nap múlva indul újra útnak. A második hajó 32 nap múlva tér vissza, és 4 nap múlva indul újra. A harmadik hajó 39 nap múlva ér vissza a kikötőbe, és 6 napot pihen, majd újra indul. Hányszor indul egy év alatt a három hajó ugyanazon a napon, ugyanabból a kikötőből?

4. Feladat (10 pont)

Egy gépkocsi egy út $\frac{2}{3}$-át 80 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladva egy órával hamarabb teszi meg, mint egy autóbusz ugyanannak az útnak a $\frac{3}{4}$-ét 60 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladva.

a) Mekkora az egész út hossza?
b) Mennyi idő alatt teszi meg az egész utat a két jármű külön-külön, ha a sebességüket nem változtatják meg?

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.

Országos Magyar Matematika Olimpia 2019
Megyei szakasz, 2019. január 26.

Javítókulcs

VI. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adott a $P = \{a, b, c, d\}$ halmaz. Határozzuk meg a halmaz elemeinek számértékét, ha a következő tulajdonságok egyidőben teljesülnek:

a) $\{a, b, 6\} \cap \{b, c, 3\} = \{b, 3\}$;

b) $\{a, b, 7\} \subset P$;

c) $\{b, c, 9\} \subset P$;

d) $\{b, c, d\} \cup \{a, 5\} = \{a, c, d, 5\}$.

(*Matlap*)

Megoldás

Hivatalból 1p

Az a) feltétel alapján $a = 3$ 2p

A b) feltétel alapján $c = 7$ vagy $d = 7$ 2p

A c) feltétel alapján $a = 9$, ami lehetetlen, tehát $d = 9$ és $c = 7$ 3p

A d) feltétel alapján $b = 5$, tehát $P = \{3, 5, 7, 9\}$ 2p

2. Feladat (10 pont)

Adottak az AOB, BOC, COD és DOE egymás melletti szögek úgy, hogy az A, O és E pontok kollineárisak. Tudjuk, hogy $AOB\sphericalangle = \frac{1}{5} \cdot BOC\sphericalangle$, $COD\sphericalangle = 4 \cdot AOB\sphericalangle$ és $DOE\sphericalangle = 2 \cdot AOB\sphericalangle$.

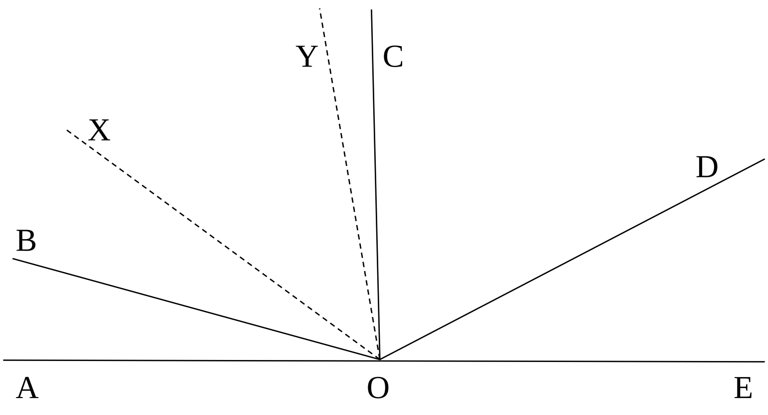
a) Számítsd ki az AOB, BOC, COD és DOE szögek mértékét!

b) Igazold, hogy $OC \perp AE$!

c) Határozd meg az AOC és BOD szögek szögfelezői által alkotott szög mértékét!

***

Megoldás



Hivatalból 1p
a) Legyen az $AOB\sphericalangle$ mértéke 1 egység $\Rightarrow$ a $BOC\sphericalangle$ mértéke 5 egység, a $COD\sphericalangle$ mértéke 4 egység és a $DOE\sphericalangle$ mértéke 2 egység. ………………………………………………..…. 1p
A négy szög mértékének összege 12 egység, ami $180°$, mivel A, O és E kollineáris pontok, az előbbi szögek egymás mellettiek …………………..…………………………………..……. 1p
1 egység $15°$ ………………………………………..……………………………………. 1p
$AOB\sphericalangle = 15°$, $BOC\sphericalangle = 75°$, $COD\sphericalangle = 60°$ és $DOE\sphericalangle = 30°$ …………………………….. 1p
b) $AOC\sphericalangle = AOB\sphericalangle + BOC\sphericalangle = 15° + 75° = 90° \Rightarrow OC \perp AE$ ……………………………… 2p
c) $AOX\sphericalangle = XOC\sphericalangle = 45°$ és $BOY\sphericalangle = YOD\sphericalangle = 67°30'$ ………………………………….. 1p
$YOE\sphericalangle = 67°30' + 30° = 97°30'$ ……………………………………………………………….. 1p
$XOY\sphericalangle = 180° - AOX\sphericalangle - YOE\sphericalangle = 180° - 45° - 97°30' = 37°30'$……………….…………… 1p

3. Feladat (10 pont)

Három hajó január elsején egyidőben indul ugyanabból a kikötőből. Az első hajó oda-vissza útja 27 napig tart, majd 3 nap múlva indul újra útnak. A második hajó 32 nap múlva tér vissza, és 4 nap múlva indul újra. A harmadik hajó 39 nap múlva ér vissza a kikötőbe, és 6 napot pihen, majd újra indul. Hányszor indul egy év alatt a három hajó ugyanazon a napon, ugyanabból a kikötőből?

Istók Éva, Kézdivásárhely

Megoldás

Hivatalból 1p
Az első hajó esetén: út + pihenő 27 + 3 = 30 nap 1p
A második hajónál: 32 + 4 = 36 nap 1p
A harmadik hajónál: 39 + 6 = 45 nap 1p
A három hajó $[30, 36, 45] = 180$ naponként indul el ugyanazon a napon ……………………. 3p
$365 : 180 = 2\ (m = 5)$, szökőév esetén is 2 a hányados ……………………………………..... 2p
A három hajó egy év alatt 1 + 2 = 3 alkalommal indul ugyanazon a napon, ugyanabból a kikötőből …... 1p

4. Feladat (10 pont)

Egy gépkocsi egy út $\frac{2}{3}$-át 80 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladva egy órával hamarabb teszi meg, mint egy autóbusz ugyanannak az útnak a $\frac{3}{4}$-ét 60 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladva.

a) Mekkora az egész út hossza?
b) Mennyi idő alatt teszi meg az egész utat a két jármű külön-külön, ha a sebességüket nem változtatják meg?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás

Hivatalból 1p
a) <u>*I. megoldás:*</u>
Legyen x az egész út hossza, t pedig a gépkocsi által az út $\frac{2}{3}$-ának megtételéhez szükséges idő.
$\frac{2}{3}x = 80 \cdot t$ 1p
Az autóbusz esetén: $\frac{3}{4}x = 60 \cdot (t+1)$ 1p
$x = \frac{3}{2} \cdot 80t \Rightarrow x = 120t$ 1p

$x=\frac{4}{3}\cdot 60\cdot(t+1) \Rightarrow x=80\cdot(t+1)$ 1p

$120\cdot t=80\cdot(t+1) \Rightarrow t=2$ h. 2p

$x=120\cdot 2=240$ km. 1p

II. megoldás:

1 óra alatt az első gépkocsi $80-60=20$ km-rel tesz meg többet 1p

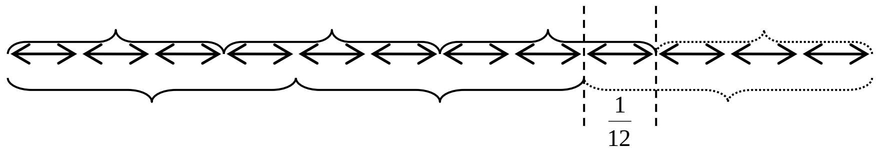
Legyen x az egész út hossza.

Az első gépkocsi 1 óra alatt $\frac{2}{3}x$, a második $\frac{3}{4}x$ utat tesz meg 2p

1 óra alatt az első gépkocsi $\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}x=\frac{1}{12}x$ utat tesz meg 2p

$\frac{1}{12}x$ .... 20 km $\Rightarrow x=12\cdot 20=240$ km. 2p

III. megoldás: szakaszokkal x nélkül



b) A gépkocsi $240:80=3$ óra alatt teszi meg az egész utat. 1p

Az autóbusz $240:60=4$ óra alatt teszi meg az egész utat. 1p