Országos Magyar Matematika Olimpia

Megyei szakasz, 2019. január 26.

VIII. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adott az $M = \{x \in \mathbb{N} | x = a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz. Igazold, hogy

a.) $170 \in M, 71 \notin M$;

b.) ha $x, y \in M$, akkor $x \cdot y \in M$;

c.) $17^{17} \in M$.

(Matlap)

2. Feladat (10 pont)

A $VABC$ szabályos háromoldalú gúlában az ABC háromszög az alap, $VB \perp (VAC)$ és $AB = 12\,\text{cm}$. Számítsd ki:

a) a gúla oldaléleinek hosszát;
b) a VO magasság hosszát;
c) a VC és AB egyenesek távolságát, azaz a közös merőlegesük hosszát!

3. Feladat (10 pont)

a) Igazold, hogy: $\frac{1}{\sqrt{2019}} - \frac{1}{\sqrt{2019}\cdot(1+\sqrt{2019})} - \frac{1}{1+\sqrt{2019}} = 0$;

b) Számítsd ki $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right)^2$-t, ha $a, b \in \mathbb{R}^*$ és $a + b \neq 0$;

c) Igazold, hogy $\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}} \in \mathbb{Q}$, bármely páronként különböző $x, y, z \in \mathbb{Q}$ számok esetén!

4. Feladat (10 pont)

Egy ládában arany és ezüst pénzérmék vannak. Az ezüstérmék száma több, mint az aranyaké. Egy aranyérme 5 gramm, egy ezüstérme 13 grammos. Hány ezüst és hány arany pénzérme lehet a ládában, ha az érmék tömege összesen háromnegyed kilogramm?

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.

Országos Magyar Matematika Olimpia

Megyei szakasz, 2019. január 26.

Javítókulcs

VIII. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adott az $M = \{x \in \mathbb{N} | x = a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz. Igazold, hogy

a.) $170 \in M, 71 \notin M$;

b.) ha $x, y \in M$, akkor $x \cdot y \in M$;

c.) $17^{17} \in M$.

(Matlap 2018/10)

Megoldás: Hivatalból **1pont**

a.) Például $170 = 13^2 + 1^2 \Rightarrow 170 \in M$ **1pont**

Ha $a^2 + b^2 = 71 \Rightarrow a^2, b^2 \leq 71$. Tehát az $a^2, b^2 \in \{0,1,4,9,16,25,36,49\}$. **1pont**

Mivel a halmaz bármely két elemének összege különbözik 71-től $\Rightarrow 71 \notin M$ **1pont**

b.) $x, y \in M \Rightarrow x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ **1pont**

Ekkor

$$xy = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) =$$
$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 =$$

$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd - 2abcd$ **1pont**

$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \in M.$ **1pont**

c.) $17^{17} = 17 \cdot 17^{16} =$ **1pont**

$(16 + 1) \cdot 17^{16} =$ **1pont**

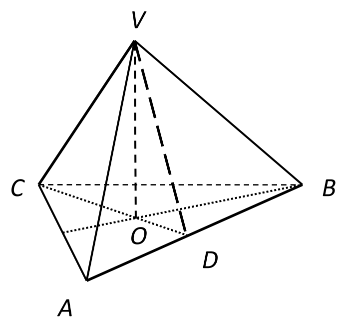
$(4 \cdot 17^8)^2 + (17^8)^2 \in M.$ **1pont**

2. Feladat (10 pont)

A $VABC$ szabályos háromoldalú gúlában az ABC háromszög az alap, $VB \perp (VAC)$ és $AB = 12$ cm. Számítsd ki:

a) a gúla oldaléleinek hosszát;
b) a VO magasság hosszát;
c) a VC és AB egyenesek távolságát, azaz a közös merőlegesük hosszát!

(Simon József, Csíkszereda)



Megoldás: Hivatalból **1pont**

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.

a) $VB \perp (VAC) \Rightarrow VB \perp VA$ **1pont**

$\Rightarrow$ az oldallapok egyenlő szárú

derékszögű háromszögek .... **1 pont**.

$AB = 12 \Rightarrow VA = VB = VC = 6\sqrt{2}$ cm .... **1 pont**.

b) $CD = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow CO = 4\sqrt{3}$ cm .... 1 pont.

$VO = \sqrt{VC^2 - CO^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} =$

$= \sqrt{72-48} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ cm .... 2 pont.

c) $VC \perp (VAB) \Rightarrow VC \perp VD$ .... 1 pont.

$VD \perp AB \Rightarrow$ a keresett távolság a VD szakasz .... 1 pont.

$VD = \sqrt{VA^2 - AD^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - 6^2} = \sqrt{72-36} = 6$ cm .... 1 pont.

3. Feladat (10 pont)

a) Igazold, hogy: $\frac{1}{\sqrt{2019}} - \frac{1}{\sqrt{2019}\cdot(1+\sqrt{2019})} - \frac{1}{1+\sqrt{2019}} = 0$;

b) Számítsd ki: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right)^2$-t, ha $a, b \in \mathbb{R}^*$ és $a + b \neq 0$;

c) Igazold, hogy $\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}} \in \mathbb{Q}$, bármely páronként különböző $x, y, z \in \mathbb{Q}$ számok esetén!

(Koczinger Éva, Szatmárnémeti)

Megoldás: Hivatalból **1pont**

a.) $\frac{1}{\sqrt{2019}} - \frac{1}{\sqrt{2019}\cdot(1+\sqrt{2019})} - \frac{1}{1+\sqrt{2019}} = \frac{1+\sqrt{2019}-1-\sqrt{2019}}{\sqrt{2019}\cdot(1+\sqrt{2019})} = 0.$ **2 pont**

b.) A számításokat elvégezve kapjuk, hogy

$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{a+b}\right)^2 + 2\frac{1}{ab} - 2\frac{1}{a(a+b)} - 2\frac{1}{b(a+b)} =$ **1pont**

Mivel az utolsó három tört összege nulla, ezért **1pont**

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{a+b}\right)^2$$ **1pont**

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}$$ **1 pont**

c.) Felhasználjuk a b) pontban kapott eredményt, ha $a=x-y, b=y-z$, akkor

$$a+b=x-z$$

ekkor: $\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}-\frac{1}{x-z}\right)^2=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(x-z)^2}$ tehát, **1 pont**

$$\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}}=\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(x-z)^2}}=$$ **1 pont**

$$\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}-\frac{1}{x-z}\right)^2}=\left|\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}-\frac{1}{x-z}\right|\in\mathbb{Q}$$ **1pont**

4. Feladat (10 pont)

Egy ládában arany és ezüst pénzérmék vannak. Az ezüstérmék száma több, mint az aranyaké. Egy aranyérme 5 gramm, egy ezüstérme 13 grammos. Hány ezüst és hány arany pénzérme lehet a ládában, ha az érmék tömege összesen háromnegyed kilogramm?

(Császár Sándor, Csíkmadaras)

Megoldás: Hivatalból **1pont**

Ha csak ezüst lenne a ládában, legtöbb 750:13=57, (maradék 9) ezüst lehetne a ládában

2 pont

Ha az ezüstök és aranyak száma egyforma lenne, legkevesebb 750:18=41 (maradék 12) ezüst lehetne a ládában.(egy arany és egy ezüst tömege összesen 18 g, és a háromnegyed kilogramm összesen 750 gramm). **2 pont**

Tehát az ezüstök száma 41 és 57 közötti szám. **1 pont**

Mivel az aranyérmék 5 grammosak, és az érmék tömege 750 gramm, két 5-tel osztható szám, az ezüstérmék száma szintén egy 5-tel osztható szám. **2 pont**

Az ezüstérmék száma tehát, 45,50 és 55 lehet. Ennek megfelelően az aranyérmék száma:

$$(750-45\cdot 13):5=33$$

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.

$$(750 - 50 \cdot 13) : 5 = 20$$

$$(750 - 55 \cdot 13) : 5 = 7$$

1 pont

Tehát a megoldás az ezüst és aranyérmék eloszlása szerint: 45-33; 50-20 és 55-7 lehet. **1 pont**