Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.
VII. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adottak az $x=2+4+6+...+4036$ és $y=2018\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{2019}\right)$ számok.

a) Igazold, hogy $a=x-2019\cdot y$ teljes négyzet.

b) Igazold, hogy $a=2019-\dfrac{1+2+3+...+2017}{\sqrt{1+3+5+...+2017}}\in N$.

2. Feladat (10 pont)

a) Oldd meg a természetes számok halmazán következő egyenletet:
$\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{4}\right|+...+\left|\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right|=2$.

b) Oldd meg a valós számok halmazán következő egyenletet:
$$\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|-\left|4\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right|=\frac{x+4\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2}$$

3. Feladat (10 pont)

Az $ABCD$ négyzet oldalának hossza 7 cm. Legyen $M\in(BC)$ és $N\in(CD)$ két pont, amelyekre $m(MAN\sphericalangle)=45^\circ$. Ha tudjuk, hogy a CMN háromszög területe 3 cm^2, határozd meg az AMN háromszög területét.

Matlap

4. Feladat (10 pont)

Matematikaórán négy tanuló felel egyszerre. A tanáruk így szól: - Itt van 20 darab kártyalap 1-től 20-ig megszámozva. Ki kell választanotok ezek közül 5-5 lapot, majd a kártyalapokon levő számokkal számpárokat képeznetek. (Jelöljük a számpárt (a,b)-vel, ahol a és b különböző természetes számok, valamint (a,b) és (b,a) alatt ugyanazt a számpárt értjük). Ezek olyan számpárok legyenek, melyek tagjainak különbsége, a nagyobbikból a kisebbik számot kivonva, néggyel osztható szám. Minden ilyen számpár 1 pontot ér. A kapott jegyed a pontjaid összege. Ezzel szétterítette a kártyákat számokkal felfele, majd adott sorrendbe a tanulók húztak öt-öt lapot.

a) Legtöbb hányast érdemel az a tanuló, akinek a kártyáin a 20,17,16,10,8 számok vannak?
b) Kaphatott mind a négy tanuló 10-est? Válaszodat indokold!
c) Peti 10 számpárt alkotott, de csak 6 pontot tudott szerezni. Legtöbb mennyi lehet a másik három tanuló által kapott jegyek összege?

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.

Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.

Javítókulcs
VII. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adottak az $x=2+4+6+...+4036$ *és* $y=2018\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{2019}\right)$ *számok.*

a) *Igazold, hogy* $a=x-2019\cdot y$ *teljes négyzet.*

b) *Igazold, hogy* $a=2019-\frac{1+2+3+...+2017}{\sqrt{1+3+5+...+2017}}\in N$.

Faluvégi Melánia, Zilah

Megoldás:
Hivatalból 1p
a)
$x = 2\cdot(1+2+3+...+2018)$ 1p
$x=2018\cdot 2019$ 1p
$y=2018\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{2018}{2019}$ 1p
$y=\frac{2018}{2019}$ 1p
$a=2018^2$ 1p

b)
$1+2+3+...+2017=2017\cdot 1009$ 1p
$\sqrt{1+3+5+...+2017}=1009$ 1p
$a=2019-2017=2\in N$ 2p

2. Feladat (10 pont)

a) *Oldd meg a természetes számok halmazán következő egyenletet:*
$\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{4}\right|+...+\left|\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right|=2$.

b) *Oldd meg a valós számok halmazán következő egyenletet:*

$$\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|-\left|4\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right|=\frac{x+4\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2}$$

Császár Sándor, Csíkmadaras
Hodgyai Edit, Micske
Tóth Csongor, Szováta

Megoldás:

Hivatalból ....1p a)

$1-\sqrt{2}<0,\ \ \sqrt{2}-\sqrt{3}<0,\ldots$ stb...1p

Így

$\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{4}\right|+\ldots+\left|\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right|=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=2\Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow\sqrt{n+1}-1=2$ 2p

$\Leftrightarrow\sqrt{n+1}=3$ ahonnan $n=8$ 1p

b)

$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}>0$, $4\sqrt{3}-\sqrt{3}<0$ 1p

$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-5\sqrt{2}=\dfrac{x+4\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2}$ 1p

Az egyenlet egyszerűbb alakba való felírása:

$-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}=\dfrac{x+4\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2}$ 1p

$2\cdot\left(-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)=x+4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ ahonnan $x=0$ 1p

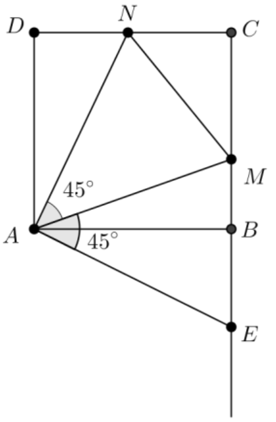
3. Feladat (10 pont)

Az $ABCD$ négyzet oldalának hossza 7 cm. Legyen $M\in(BC)$ és $N\in(CD)$ két pont, amelyekre $m(MAN\sphericalangle)=45°$. Ha tudjuk, hogy a CMN háromszög területe $3\ \mathrm{cm}^2$, határozd meg az AMN háromszög területét.

Matlap 2018/10

Megoldás:

Hivatalból 1p



A BC oldal meghosszabbításán felvesszük az E pontot úgy, hogy $m(EAM\sphericalangle)=45°$ 2p

Így $\left.\begin{aligned}m(EAB\sphericalangle)&=90°-45°-m(BAM\sphericalangle)\\ m(NAD\sphericalangle)&=90°-45°-m(BAM\sphericalangle)\end{aligned}\right\}\Rightarrow EAB\sphericalangle\equiv NAD\sphericalangle$ 2p

$\left.\begin{aligned}&EAB\sphericalangle\equiv NAD\sphericalangle\\ &[AB]\equiv[AD]\\ &ABE\sphericalangle\equiv ADN\sphericalangle\end{aligned}\right\}\overset{sz.o.sz}{\Rightarrow} ABE\triangle\equiv ADN\triangle\Rightarrow[AE]\equiv[AN]$ 1p

$$\left.\begin{array}{l}[AE]\equiv[AN]\\ [AM]\equiv[AM]\\ MAN\sphericalangle\equiv EAM\sphericalangle\end{array}\right\}\overset{o.sz.o}{\Rightarrow} MAN_{\triangle}\equiv EAM_{\triangle}\Rightarrow T_{MAN_{\triangle}}=T_{EAM_{\triangle}}=T$$ 2p

$$\left.\begin{array}{l}ABE_{\triangle}\equiv ADN_{\triangle}\Rightarrow T_{ABCD}=T_{AECN}\\ T_{AECN}=2T+T_{MNC}=2T+3\end{array}\right\}\Rightarrow 2T+3=49\Rightarrow T=23\text{cm}^2$$ 2p

4. Feladat (10 pont)

Matematikaórán négy tanuló felel egyszerre. A tanáruk így szól: - Itt van 20 darab kártyalap 1-től 20-ig megszámozva. Ki kell választanotok ezek közül 5-5 lapot, majd a kártyalapokon levő számokkal számpárokat képeznetek. (Jelöljük a számpárt (a,b)-vel, ahol a és b különböző természetes számok, valamint (a,b) és (b,a) alatt ugyanazt a számpárt értjük). Ezek olyan számpárok legyenek, melyek tagjainak különbsége, a nagyobbikból a kisebbik számot kivonva,néggyel osztható szám. Minden ilyen számpár 1 pontot ér. A kapott jegyed a pontjaid összege. Ezzel szétterítette a kártyákat számokkal felfele, majd adott sorrendbe a tanulók húztak öt-öt lapot.

a) Legtöbb hányast érdemel az a tanuló, akinek a kártyáin a 20,17,16,10,8 számok vannak?
b) Kaphatott mind a négy tanuló 10-est? Válaszodat indokold!
c) Peti 10 számpárt alkotott, de csak 6 pontot tudott szerezni. Legtöbb mennyi lehet a másik három tanuló által kapott jegyek összege?

Császár Sándor, Csíkmadaras

Megoldás:

Hivatalból 1p

a) A tanuló 3-ast éremel... .1p
A megfelelő számpárok: (20,16), (20,8), (16,8)...................................... 1p

b)
Tanulónként az 5 szám legtöbb 10 különböző számpárba rendezhető................ 1p
Kimutatja, hogy lehetséges a 20 kártyalapot olyan módon kihúzni, hogy mindenki 10-es jegyet kapjon: ha mindegyik tanuló 5 olyan lapot húzott, melyek 4-gyel való osztási maradéka azonos volt. 2p
Ekkor mindegyikük kaphatott 10-est. 1p

c)
Mivel Peti 6 pontot tudott szerezni, ez azt jelenti, hogy a 4-gyel való azonos osztási maradékú számokból 4-et választott, az ötödik kártyalapon pedig más alakú szám szerepelt. 1 p
Ennek megfelelően egy másik tanuló is Petihez hasonló helyzetbe került. 1 p
Ekkor legtöbb 6+10+10 =26 volt a másik három tanuló által kapott jegyek összege. ..1p