

VII. Nemzetközi Magyar Matematikaolimpia
Marosvásárhely, 2025. május 2.

V. osztály

1. feladat (10 pont). A Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen vidám vetélkedőt rendeztek.

A résztvevőknek pontosan az $\frac{1}{3}$ része az erdélyi, $\frac{2}{7}$ része pedig a felvidéki régió versenyzője volt. A magyarországi csapatból 12 diák vetélkedett, a kárpátaljai és a délvidéki régióból pedig összesen kevesebb diák indult a vetélkedőn, mint a magyarországi csapatból. Hányan vettek részt a vetélkedőn összesen és közülük hányan indultak a kárpátaljai és a délvidéki régióból?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

I. megoldás: Ábrázolás módszerével.

Jelöljük

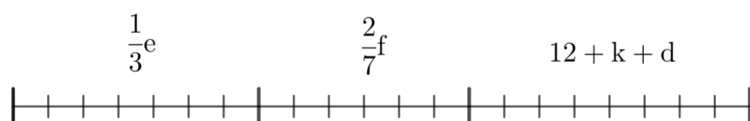
e = erdélyi résztvevők száma

f = felvidéki résztvevők száma

k = kárpátaljai résztvevők száma

d = délvidéki résztvevők száma

m = magyarországi résztvevők száma



(2 pont)

Az erdélyi résztvevők aránya $\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$

A felvidéki résztvevők aránya $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$

(1 pont)

$6 + 7 = 13$, ezért $21 - 13 = 8$, vagyis az $m + k + d$ aránya $\frac{8}{21}$

(1 pont)

Mivel $k + d < m$, ezért:

1. eset: Ha a magyarok száma $\frac{5}{21}$ része a résztvevők számának, akkor $12 \cdot \frac{21}{5}$ nem természetes szám.
(1 pont)

2. eset: Ha a magyarok száma $\frac{6}{21}$ része a résztvevők számának, akkor $12 \cdot \frac{21}{6} = 42$ természetes szám (= résztvevők száma).
(1 pont)

$$\left. \begin{array}{l} e = \frac{1}{3} \cdot 42 = 14 \text{ erdélyi résztvevők} \\ f = \frac{2}{7} \cdot 42 = 12 \text{ felvidéki résztvevők} \end{array} \right\} \Rightarrow d + k = 4$$
 (2 pont)

3. eset: Ha a magyarok száma $\frac{7}{21}$ része a résztvevők számának, akkor $12 \cdot \frac{21}{7}$ nem természetes szám.
(1 pont)

II. megoldás:

Mivel $\frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{13}{21}$, ezért a résztvevők száma osztható 21-gyel. Ezért tekintsük a 21-et és annak többszöröseit. (2 pont)

Ha a résztvevők száma 21 lenne, akkor ebből erdélyi és felvidéki összesen 13 fő, ami a magyarországi 12 fővel együtt is több mint 21 lenne, tehát ez nem lehetséges. (2 pont)

Ha a résztvevők száma 42 lenne, akkor ebből erdélyi és felvidéki összesen 26 fő, a magyarországi 12 fővel együtt ez 38 fő. Ez az eset lehetséges, ha a kárpátaljai és délvidéki régióból 4 diák indult. (2 pont)

Ha a résztvevők száma 63 fő lenne, akkor ebből erdélyi és felvidéki összesen 39 fő, a magyarországi 12 fővel együtt ez 51 fő, ami nem felel meg a feladat feltételeinek, mert akkor a kárpátaljai és délvidéki indulók száma 12 fő lenne. (2 pont)

Ha a résztvevők számát tovább növeljük, akkor még többen kellene legyenek a kárpátaljai és délvidékiek, így nincs a feladatnak több megoldása. (1 pont)

III. megoldás:

Jelöljük x -el a résztvevők számát és n -el a délvidéki és kárpátaljai diákok összlétszámát.

$$n < 12 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{7}x + 12 + n = x \quad (2 \text{ pont})$$

$$7x + 6x + 252 + 21n = 21x \quad (1 \text{ pont})$$

$$8x = 252 + 21n \Rightarrow n : 8 \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $n < 12$ és $n : 8$, n lehetséges értékei 2, 4, 6, 8, 10. (1 pont)

Ha $n = 2$ akkor $(252 + 42) : 8$

Ha $n = 4$ akkor $(252 + 84) : 8$

Ha $n = 6$ akkor $(252 + 126) : 8$

Ha $n = 8$ akkor $(252 + 168) : 8$

Ha $n = 10$ akkor $(252 + 210) : 8$ (2 pont)

Tehát $n = 4$, amiből következik, hogy kárpátaljai és délvidéki résztvevők száma összesen 4 és $x = 42$ diák vesz részt a versenyen. (1 pont)



2. feladat (10 pont). Ádám szeret sakkozni. Minden lejátszott sakkparti után zászlókat tűz ki a kertjébe. Az első után egyet, a második után kettőt, a harmadik után hármat és így tovább. Az n -edik sakkparti után barátja Balázs megállapítja, hogy 2016 zászló van kitűzve. Ádám szerint, ő 2025 zászlót tűzött ki. Igaza lehet-e mindkét fiúnak? (***)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$n \cdot (n+1) = 2 \cdot 2016 \quad (1 \text{ pont})$$

$2 \cdot 2016 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 = 64 \cdot 63$, következik, hogy felírható két egymás utáni szám szorzataként. (2 pont)

Tehát Balázsnak igaza van. (1 pont)

$$n \cdot (n+1) = 2 \cdot 2025 \quad (1 \text{ pont})$$

$2 \cdot 2025 = 4050$, $4032 = 63 \cdot 64 < 4050 < 4160 = 64 \cdot 65$, ezért $2 \cdot 2025$ nem írható fel két egymás utáni szám szorzataként. (3 pont)

Tehát Ádámnak nincs igaza. (1 pont)



3. feladat (10 pont). Egy háromjegyű szám középső számjegyét töröltük. Mi lehet a háromjegyű szám, ha az így kapott kétjegyű szám 9-ed része az eredeti számnak?

(Szabó Magda, Szabadka)

(Hodgyai Edit, Micske)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

I. megoldás:

A feladatnak megfelelően $\overline{abc} = 9 \cdot \overline{ac}$, $a \neq 0$.

(1 pont)

$$100a + 10b + c = 9 \cdot (10a + c)$$

Ebből következik, hogy $5 \cdot (a + b) = 4c$, ezért $c : 5$ és $(a + b) : 4$.

(2 pont)

Mivel c itt 0-tól különbözik, 5-tel osztható, tehát $c = 5$ és $a + b = 4$

Ebből $a = 1$ és $b = 3$, vagy $a = 2$ és $b = 2$, vagy $a = 3$ és $b = 1$, vagy $a = 4$ és $b = 0$.

(2 pont)

A kapott számok megfelelőek, mert $135 = 9 \cdot 15$, $225 = 9 \cdot 25$, $315 = 9 \cdot 35$, $405 = 9 \cdot 45$.

Tehát a keresett háromjegyű szám: 135, 225, 315, 405.

(2 pont)

II. megoldás:

Mivel a háromjegyű szám az $\overline{abc}$, ezért $\frac{\overline{abc}}{9} = \overline{ac}$, $a \neq 0$.

(1 pont)

Így $\overline{abc} = 9 \cdot \overline{ac}$, $a \neq 0$, ezért $(a + b + c) : 9$, tehát $a + b + c = 9$ vagy $a + b + c = 18$ vagy $a + b + c = 27$ ($a = b = c = 9$).

(1 pont)

Mivel

$$100a + 10b + c = 9 \cdot (10a + c)$$

$$100a + 10b + c = 90a + 9c$$

$$10a + 10b = 8c$$

$5 \cdot (a + b) = 4c$, így $c : 5$ és $\overline{abc}$ utolsó számjegye 0 vagy 5.

(1 pont)

Azaz $(a + b) : 4$.

(1 pont)

Mivel $(a + b) : 4$ és $(a + b + c) : 9$, ezért $c = 5$.

(1 pont)

$$\overline{ab5} = 9 \cdot \overline{a5}$$

1. eset: Ha $a + b + c = 9$, akkor $a + b = 4$

a	b	Ellenőrzés	$\overline{abc}$
1	3	$9 \cdot 15 = 135$	135
2	2	$9 \cdot 25 = 225$	225
3	1	$9 \cdot 35 = 315$	315
4	0	$9 \cdot 45 = 405$	405

(2 pont)

2. eset: Ha $a + b + c = 18$, akkor $a + b = 13$

a	b	Ellenőrzés	Következtetés
9	4	$9 \cdot 95 = 855$	$4 \neq 5$ (ellentmondás)
8	5	$9 \cdot 85 = 765$	$5 \neq 6$ (ellentmondás)
7	6	$9 \cdot 75 = 675$	$6 \neq 7$ (ellentmondás)
6	7	$9 \cdot 65 = 585$	$7 \neq 8$ (ellentmondás)
5	8	$9 \cdot 55 = 495$	$8 \neq 9$ (ellentmondás)
4	9	$9 \cdot 45 = 405$	$9 \neq 0$ (ellentmondás)

(1 pont)

3. eset: Ha $a + b + c = 27$, akkor $a = b = c = 9$. Így $9 \cdot 95 = 855$, ezért $b = 5$ (ellentmondás).

(1 pont)

4. feladat (10 pont). Egy dobozban 100 golyó van, kék, fehér és piros. Becsukott szemmel 26 golyót kell kivenni ahhoz, hogy ezek között biztosan legyen 10 azonos színű golyó. Hány golyót kell becsukott szemmel kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen közte 30 azonos színű golyó?

(Róka Sándor, Nyíregyháza)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Mivel a 26 golyóból 10 azonos színű volt, ezért a legrosszabb esetben $16 + 10$ golyót húztunk. Tehát van két olyan szín, melyekből együtt 16 golyó van. Ezekből kihúztunk $9 + 7$ vagy $8 + 8$ golyót.

(3 pont)

Ha mindkét színből 16 golyót húztunk összesen, akkor $9 + 7 + 30 = 46$ vagy $8 + 8 + 30 = 46$ golyót kell kihúzni ahhoz, hogy 30 azonos színű golyó legyen.

(2 pont)

Ha valamelyik színből 7 golyót húztunk, akkor a legrosszabb esetben $7 + 29 + 30 = 66$ golyót kell kihúzni ahhoz, hogy 30 azonos színű golyó legyen.

(3 pont)

A színek eloszlását nem ismerjük, ezért 66 golyó kihúzása jelenti biztosan a 30 azonos színű golyót.

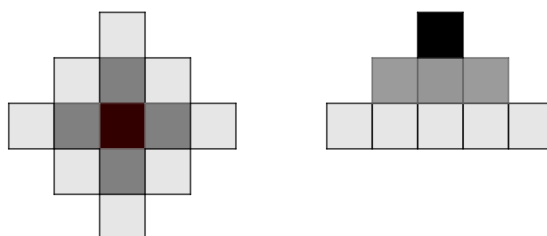
(1 pont)

5. feladat (10 pont). Anna egy asztalra olyan 5 szintű piramist rakott ki egyforma méretű kockákból, amelynek legfelső három rétege felülnézetből és oldalnézetből az ábrákon látható, a következő rétegek a látható három réteg mintájára készültek. Mielőtt felépítette volna a piramist, a kockákat megszámozta 1-től kezdődően egymás utáni természetes számokkal, úgy, hogy az adott kocka minden lapjára ugyanazt a számot írta.

a) Hány darab kockát használt fel Anna a piramis megépítéséhez?

b) Hány kocka fog látszani a piramis külső oldalain?

c) Mennyi lehet a megépített piramison a látható számok legnagyobb összege?



(Császár Sándor, Csíkszereda)
(dr. Kupán Pál, Marosvásárhely)
(Hodgyai Edit, Micske)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

	Szintek száma	Kockák száma	
	1.	1	
a)	2.	$1+3+1=2 \cdot 1 + 3=5$	(2 pont)
	3.	$1+3+5+3+1=2 \cdot (1+3)+5=13$	
	4.	$1+3+5+7+5+3+1=2 \cdot (1+3+5)+7=25$	
	5.	$1+3+5+7+9+7+5+3+1=2 \cdot (1+3+5+7)+9=41$	

A szinteket a piramis felső szintjétől lefele számoztuk.

Tehát a piramis megépítésénél $1 + 5 + 13 + 25 + 41 = 85$ kockát használt fel Anna. (1 pont)

	Szintek száma	Hány kocka látszik?	
	1.	1	
b)	2.	4	(2 pont)
	3.	8	
	4.	12	
	5.	16	

A piramis oldalain $1 + 4 + 8 + 12 + 16 = 41$ kocka látszik. (1 pont)

c) A piramison a kockáknak 5, 4, 3 oldallapja látható. A piramis tetején lévő kockának 5 oldallapja látszik. Az egyes szintek sarkain lévő kockáknak 4 oldallapja, míg a többi látható kockának 3 oldallapja látszik.

Egy olyan kocka van, amelynek 5 oldallapja látszik, $4 \cdot 4 = 16$ olyan kocka, amelynek 4 oldallapja látszik.

 $1 + 16 = 17$, így $41 - 17 = 24$ kockának látható 3 oldallapja. (1 pont)

Ahhoz, hogy a piramison a látható számok összege a legnagyobb legyen, a legnagyobb szám arra a kockára kell kerüljön, amelyiknek a legtöbb oldala látszik, ami a jelen esetben az 5 oldallap.

A következő legnagyobb számok azokra a kockákra kerülnek, amelyeknek 4, majd 3 oldala látszik.

5 oldallap	1 kocka	85 szám	
4 oldallap	16 kocka	84,83,82,...,70,69	(1 pont)
3 oldallap	24 kocka	68,67,66,...,45	

A látható számok összege:

$$5 \cdot 85 + 4 \cdot (84 + 83 + 82 + \dots + 70 + 69) + 3 \cdot (68 + 67 + 66 + \dots + 45) = 5 \cdot 85 + 4 \cdot (84 + 69) \cdot 8 + 3 \cdot (68 + 45) \cdot 12 =$$

$$= 425 + 4896 + 4068 = 9389$$

(1 pont)

