

VII. Nemzetközi Magyar Matematikaolimpia
Marosvásárhely, 2025. május 2.

VI. osztály

1. feladat (10 pont). Okoska szeret minden kérdésre furfangos választ adni. A szomszéd bácsi megkérdezte Okoskát, hány éves. Okoska azt válaszolta, hogy: „Ha x egy hatjegyű természetes szám számjegyeinek összege, y pedig az x számjegyeinek összege, akkor az y lehetséges legnagyobb értéke egyenlő az én éveim számával.” Határozd meg, hány éves Okoska!

(Mastan Eliza, Nagybánya)

(Fodor Erika, Beszterce)

(Papp Ilonka, Brassó)

(Kassay Sándor, Kolozsvár)

(dr. Szász Róbert, Marosvásárhely)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Egy hatjegyű természetes szám számjegyeinek összege legfeljebb $6 \cdot 9 = 54$ lehet.

(2 pont)

Az x számjegyeinek összege nagyobb lehet, ha x kétjegyű természetes szám, mint ha egyjegyű lenne.

(1 pont)

Ha $x = \overline{ab}$ alakú szám, a feladat feltételeiből $\overline{ab} \leq 54$

(1 pont)

és $y = a + b$ akkor a lehető legnagyobb, ha $b = 9$ és $a = 4$.

(3 pont)

Így az y lehetséges legnagyobb értéke 13.

(1 pont)

Okoska 13 éves.

(1 pont)



2. feladat (10 pont). Peti egy olyan téglalapot rajzolt, mely kerületének mérőszáma egyenlő az Anna kockája élei hosszának összegével. A téglalap területe 2025 cm^2 . Hány centiméter hosszú lehet Anna kockájának éle, ha a téglalap oldalainak és a kocka éleinek hossza centiméterben mérve pozitív egész szám?

(Fedorszki Ádám, Budapest)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Jelölje a és b a téglalap oldalainak hosszát, akkor $ab = 2025 = 3^4 \cdot 5^2$.

(1 pont)

Ha c jelöli a kocka élének a hosszát és K a téglalap kerülete, akkor következik, hogy $K = 12c$.

(1 pont)

Vizsgáljuk meg Peti téglalapja oldalainak és kerületének hosszát centiméterben.

a	1	3	5	9	15	25	27	45
b	2025	675	405	225	135	81	75	45
K	4052	1356	820	468	300	212	204	180

(2 pont)

Ellenőrizzük azt, hogy melyik kerület mérőszáma osztható 12–vel.

(1 pont)

Ezek a kerületek a következők: 1356, 468, 300, 204 és 180.

(2 pont)

Anna kockájának éle $c = K : 12$, vagyis 113, 39, 25, 17 és 15 centiméter lehet.

(2 pont)



3. feladat (10 pont). Két természetes számról azt mondjuk, hogy relatív prímek, ha a legnagyobb közös osztójuk 1. Legfeljebb hány kétjegyű összetett természetes számot választhatunk úgy, hogy bármely kettő relatív prím legyen?

(Róka Sándor, Nyíregyháza)

- Megoldás. Hivatalból* (1 pont)
 A kétjegyű összetett természetes számoknak van 10-nél kisebb prímosztója. (1 pont)
 A 10-nél kisebb prímosztók: 2, 3, 5 és 7. (2 pont)
 Mivel bármely két szám relatív prím kell legyen, a 2, 3, 5 és 7 mindegyike legfeljebb egy számnak lehet az osztója. (2 pont)
 Ha öt összetett számot választunk, lesz közöttük legalább kettő, melynek közös osztója a 2, 3, 5 vagy 7. (2 pont)
 Ezért legfeljebb négy szám teljesíti a feltételt. (2 pont)



4. feladat (10 pont). Pisti a 2025-ben megrendezésre kerülő VII. NMMV tiszteletére felírta növekvő sorrendben az összes olyan hétjegyű pozitív egész számot, amelyben az első négy számjegy szorzata 20, az utolsó négy számjegy szorzata pedig 25.

- a) Hány számot írt fel Pisti?
 b) Melyik szám volt Pisti listáján a középső?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

- a) Az első négy számjegy szorzata 20, tehát ezek valamilyen sorrendben 1; 1; 4; 5 vagy 1; 2; 2; 5.

(1 pont)

Az utolsó négy számjegy szorzata 25, tehát ezek valamilyen sorrendben 1; 1; 5; 5. (1 pont)

A középső számjegy előlről is, hátulról is a negyedik, ezért mindkét számsorban szerepelnie kell, ezért a középső számjegy csak 1 vagy 5 lehet. (1 pont)

1. eset: a középső számjegy az 1. Az első három helyen vagy az 1; 4; 5 számjegyeket kell sorba rendezni, vagy a 2, 2; 5 számjegyeket, előbbire 6, utóbbira 3 lehetőség van, így az első három helyre 9-féleképpen írhatunk számokat. Az utolsó három helyen az 1; 5; 5 számoknak 3-féle lehetséges sorrendje van. Összesen $(6 + 3) \cdot 3 = 27$ szám képezhető ebben az esetben. (1 pont)

2. eset: a középső számjegy az 5. Az előző esethez hasonló módon számolva, a lehetőségek száma ezúttal $(3 + 3) \cdot 3 = 18$. (1 pont)

Összesen $27 + 18 = 45$ szám felel meg a feladat feltételeinek. (1 pont)

- b) Vegyük észre, hogy akár 1, akár 5 áll a negyedik helyen, az utolsó 3 számjegy sorrendje 3-féle lehet. Vagyis bármelyik lehetséges első négy számjegy 3-3 megfelelő számot generál. Az első négy számjegyből alkotott számok növekvő sorrendben: 1145; 1225; 1415; 1451; 1541; 2125; 2215. Ez eddig 7 eset, mindegyiket 3-féleképpen folytatva megkapjuk a 21 legkisebb számot. A következő 3 szám első négy számjegye 2251, ezért a 22. szám a 2251155, a 23., vagyis a középső szám Pisti listáján pedig a 2251515. (3 pont)



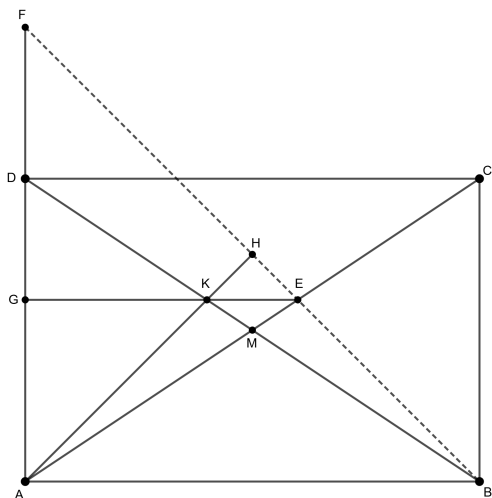
5. feladat (10 pont). Az $ABCD$ téglalapban a B csúcsnál lévő belső szög szögfelezőjének metszéspontja az AC és AD egyenesekkel rendre az E és F pont. Az E ponton áthaladó AB -vel párhuzamos egyenes a BD átlót K pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy FK merőleges az AC átlóra! (Szabó Magda, Szabadka)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Tekintsük a következő ábrát

(1 pont)



Mivel $ABCD$ téglalap következik, hogy $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$

$$\left. \begin{array}{l} KE \parallel AB \\ AE, BK \text{ szelők} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{EKB} = \widehat{KBA}, \widehat{KEA} = \widehat{EAB} \quad \text{belső váltó szögek} \quad (1 \text{ pont})$$

Legyen $AC \cap BD = \{M\}$, ekkor

$$\left. \begin{array}{l} EMK_{\Delta}\text{-ben } \widehat{E} = \widehat{K} \Rightarrow MK = ME \\ AMB_{\Delta}\text{-ben } \widehat{A} = \widehat{B} \Rightarrow MA = MB \end{array} \right\} \text{következik, hogy } ME + MA = MK + MB \text{ azaz } AE = BK \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Ugyanakkor} \quad \left. \begin{array}{l} MK = ME \\ MA = MB \\ \widehat{KMA} = \widehat{EMB} \text{ (csúcsszögek)} \end{array} \right\} \text{következik, hogy } KMA_{\Delta} \equiv EMB_{\Delta} \text{ vagyis} \quad AK = EB \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Mivel} \quad \left. \begin{array}{l} AK = EB \\ AE = BK \\ AB \text{ (közös oldal)} \end{array} \right\} \text{következik, hogy } ABK_{\Delta} \equiv BAE_{\Delta} \text{ tehát } \widehat{KAB} = \widehat{EBA}$$

$$\text{Így } \widehat{EBA} = \frac{\widehat{CBA}}{2} = 45^{\circ} \text{ vagyis } \widehat{KAB} = 45^{\circ} \quad (1 \text{ pont})$$

Legyen $EK \cap AF = \{G\}$, $AK \cap BF = \{H\}$.

Ekkor az ABH_{Δ} -ben $\widehat{B} = 45^{\circ}$, $\widehat{A} = 45^{\circ}$ tehát $\widehat{AHB} = 180^{\circ} - 45^{\circ} - 45^{\circ} = 90^{\circ}$, vagyis $AH \perp EF$, és így AH magasság AEF_{Δ} -ben. (1 pont)

Mivel $\left. \begin{array}{l} EK \parallel AB \\ AB \perp AD \end{array} \right\}$ következik, hogy $EK \perp AD$, azaz $EG \perp AF$, tehát EG magasság AEF_{Δ} -ben (1 pont)

A fentieket összegezve, az AEF_{Δ} -ben: $\left. \begin{array}{l} EG \text{ (magasság)} \\ AH \text{ (magasság)} \\ EG \cap AH = \{K\} \end{array} \right\}$ tehát K az AEF_{Δ} ortocentruma

(1 pont)

Azaz $FK \perp AE$, ezért $FK \perp AC$.

(1 pont)

■