

VII. Nemzetközi Magyar Matematikaolimpia
Marosvásárhely, 2025. május 2.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). Jelöljön $\overline{abcd}$ egy négyjegyű pozitív egész számot. Határozd meg az

$$A = \left\{ \overline{abcd} \mid \frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} = \frac{\overline{db}}{10} \right\}$$

halmazt!

(Faluvégi Melánia, Zilah)

Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Mivel

$$\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} = \frac{\overline{db}}{10}$$

fennáll $4 \cdot \overline{db} = 10 \cdot \overline{ab}$, amit 2-vel osztva kapjuk, hogy $2 \cdot \overline{db} = 5 \cdot \overline{ab}$, azaz $b = 0$

(2 pont)

illetve $5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd}$, ahonnan $d \in \{0, 5\}$.

(2 pont)

Ha $d = 0$, akkor $\overline{db} = 0$ és

$$\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} = 0$$

ami nem lehetséges mivel $a \neq 0$.

(2 pont)

A $d = 5$ eset maradt,

$$\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} = \frac{50}{10}$$

ahonnan következik, hogy $\overline{ab} = 20$, azaz $a = 2$

(1 pont)

illetve $\overline{cd} = 25$ tehát $c = 2$.

(1 pont)

Végül a megoldás $A = \{2025\}$.

(1 pont)



Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Tudva, hogy

$$\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} = \frac{\overline{db}}{10} = k$$

kapjuk, hogy $\overline{ab} = 4k$, azaz $10a + b = 4k \mid \cdot 5$

(1 pont)

továbbá $\overline{db} = 10k$, vagy $10d + b = 10k \mid \cdot 2$.

(1 pont)

Így $50a + 5b = 20d + 2b$.

(1 pont)

Rendezve a fenti összefüggést: $3b = 20d - 50a$, amiből következik, hogy $b = 0$.

(1 pont)

A fenti összefüggés új alakja:

$$\frac{\overline{a0}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} = \frac{\overline{d0}}{10} = d, \quad d \neq 0.$$

(1 pont)

Ha $\overline{cd} = 5d$, akkor $10c + d = 5d$, így $10c = 4d$, ahonnan $d = 5$.

(1 pont)

Ekkor $10c = 20$ és $c = 2$.

(1 pont)

Az

$$\frac{\overline{a0}}{4} = 5$$

összefüggésből $a = 2$.

Így $A = \{2025\}$.

(1 pont)

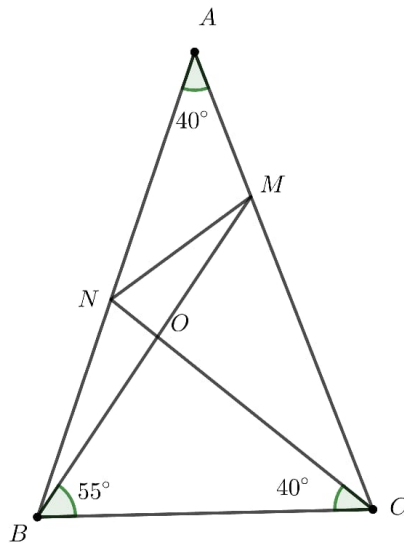


2. feladat (10 pont). Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$ és $m(\hat{A}) = 40^\circ$. Az AC és AB oldalakon az M és N pontok úgy helyezkednek el, hogy $m(\widehat{MBC}) = 55^\circ$ és $m(\widehat{NCB}) = 40^\circ$. Határozd meg az $\widehat{NMB}$ szög mértékét!

(Kovács Béla, Szatmárnémeti)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



Az ABC egyenlőszárú háromszög esetében $m(\hat{A}) = 40^\circ$ és

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ.$$

(1 pont)

A BCN háromszög szögei rendre: 40° , 70° és $180^\circ - (40^\circ + 70^\circ) = 70^\circ$.

(1 pont)

Mivel két szöge egyenlő, ezért a BCN háromszög egyenlő szárú, azaz $BC = CN$.

(1 pont)

A BCM háromszög szögei pedig 55° , 70° és $180^\circ - (55^\circ + 70^\circ) = 55^\circ$.

(1 pont)

Két szöge egyenlő, ezért BCM háromszög egyenlő szárú, azaz $BC = CM$.

(1 pont)

Mivel $BC = CN$ és $BC = CM$ kapjuk, hogy $CN = CM$.

(1 pont)

Így a CMN háromszög egyenlő szárú,

(1 pont)

melynek a szögei: $m(\widehat{MCN}) = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$ és

$$m(\widehat{CNM}) = m(\widehat{CMN}) = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ.$$

(1 pont)

Végül $m(\widehat{NMB}) = 75^\circ - 55^\circ = 20^\circ$.

Tehát $m(\widehat{NMB}) = 20^\circ$.

(1 pont)



3. feladat (10 pont). Márti néninek 8 unokája van, életkoraik egymástól különböző, pozitív egész számok. Legidősebb unokája Zsófi, aki 10 éves. Az unokái közül, a fiúk életkorának összege egyenlő a lányok életkorának összegével és a lányok életkorának szorzata egyenlő a fiúk életkorának szorzatával. Hány fiúunokája van Márti néninek és hány évesek?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az unokák között nem lehet 7 éves, mert akkor a vele egyforma nemű unokák életkorának szorzata osztható lenne 7-tel, a másik nem esetében pedig nem lenne osztható. (1 pont)

1-től 10-ig a számok összege 55, így ezek közül a 7-es számot elhagyva a megmaradt 9 szám összege 48 év, szorzata pedig $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, ami egy négyzetszám. (1 pont)

Olyan számot kell elhagyni, amely páros, hiszen az unokák életkorának összege páros, illetve négyzet-szám, mivel az unokák életkorának szorzata is négyzetszám. (1 pont)

Egyetlen olyan 10-nél kisebb szám van, amely megfelel ennek a két feltételnek, a 4. (1 pont)

Az unokák életkorának összege 44, szorzata $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2$. (1 pont)

Vagyis mindkét nem esetében az életkorok összege 22, szorzata $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. (1 pont)

Zsófi 10 éves, ezért a többi lányunoka életkorának összege 12, szorzata 36. (1 pont)

Ez csak úgy lehetséges, ha életkoraik 1; 2; 3 és 6. (1 pont)

Ekkor a fiúunokák hárman vannak, életkoraik 5; 8 és 9 év. (1 pont)



4. feladat (10 pont). Egy dobozban 2025 golyó van: kék, zöld, fehér és piros. Becsukott szemmel n golyót kell kivenni ahhoz, hogy ezek között biztosan legyen 20 azonos színű golyó. Hány golyót kell becsukott szemmel kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen ezek között 50 azonos színű golyó, ha $n = 40$ illetve $n = 60$?

(Róka Sándor, Nyíregyháza)

(Dr. Salamon Júlia, Csíkszereda)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

1. eset

Mivel becsukott szemmel 40 golyót kell kivenni ahhoz, hogy ezek között biztosan legyen 20 azonos színű golyó: az egyik színből biztosan ki húztunk 20-at, míg a maradék három színű golyóból összesen 20 darabot. (1 pont)

Mivel biztosan van mindegyik színű golyóból legalább egy, így egyik színű golyóból sem tudunk 19 darabot kihúzni. (1 pont)

Innen következik, hogy a másik három színű golyóból összesen csak 20 darab van. (1 pont)

Ha a maradék három színű golyó valamelyikéből legalább 19 golyó lenne, akkor ahhoz, hogy biztosan 20 azonos színű golyót tudjunk kihúzni, legkevesebb $20+19+1+1=41$ golyót kellene kivennünk. Tehát ahhoz, hogy biztosan kapjunk 50 azonos színű golyót $50+20=70$ golyót kell kihúzzunk. (2 pont)

2. eset

Mivel becsukott szemmel 60 golyót kell kivenni ahhoz, hogy ezek között biztosan legyen 20 azonos színű golyó: az egyik színű golyóból biztosan kell legyen 20 és a másik három színű golyóból viszont 40 darabot, de ezek közül egyik színből sem lehet 1-nél kevesebb illetve 19-nél több.

Három esetet különböztetünk meg:

Ha a másik három színű golyó egyikéből sem húztunk 19-et, akkor ahhoz, hogy biztosan kapjunk 50 azonos színű golyót $50+40=90$ húzásra van szükségünk. (1 pont)

Ha az egyik színű golyóból 19 darabot húztunk, akkor abból lehet több darab is, de a maradék két színű golyóból 21 darab van. Így ahhoz, hogy biztosan kapjunk 50 azonos színű golyót $50+49+21=120$ húzásra van szükségünk. (1 pont)

Ha két különböző színű golyóból is 19 darabot húztunk, akkor a negyedik színű golyóból 2 darab van. Így ahhoz, hogy biztosan kapjunk 50 azonos színű golyót $50+49+49+2=150$ húzásra van szükségünk. (1 pont)

Az esetek közül azt kell választani, amelyik a legkedvezőtlenebb, hiszen biztosan ki kell húzzunk 50 egyforma golyót. Azaz a megoldás 150. (1 pont)

■

5. feladat (10 pont). Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$ és $AB = 3 \cdot CD$. Az AM és CN egyenesek a P pontban metszik egymást, ahol az M és N pontok a CD illetve AD szakaszok felezőpontjai.

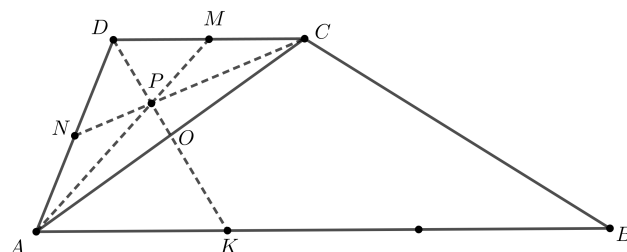
a) Számítsd ki az APC háromszög területének és az $ABCD$ trapéz területének arányát!

b) Ha a DP és AB egyenesek a K pontban metszik egymást, akkor számítsd ki az AKD háromszög területének és a $DKBC$ négyszög területének arányát!

(Tóth Csongor, Szováta)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



a) A trapéz párhuzamos oldalai közti távolság legyen h (a trapéz magassága), ekkor

$$\frac{T_{ADC}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{DC \cdot h}{2}}{\frac{(AB+CD) \cdot h}{2}} = \frac{DC}{4DC} = \frac{1}{4}. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel M a DC szakasz felezőpontja, ezért $T_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot T_{ADC}$, így

$$\frac{T_{AMC}}{T_{ABCD}} = \frac{1}{8}. \quad (1 \text{ pont})$$

Továbbá AM és CN oldalfelezők a DAC háromszögben, így P a DAC háromszög súlypontja, ezért $\frac{PM}{AM} = \frac{1}{3}$. (1 pont)

Így

$$\frac{T_{CMP}}{T_{CMA}} = \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad \frac{T_{CPA}}{T_{CMA}} = \frac{2}{3}. \quad (1 \text{ pont})$$

A fentiek alapján

$$\frac{T_{APC}}{T_{ABCD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}. \quad (1 \text{ pont})$$

b) Legyen $DP \cap AC = \{O\}$. Mivel P súlypontja az ADC háromszögnek, ezért O az AC szakasz felezőpontja. (1 pont)

Továbbá NO középvonal a DAK és ACD háromszögekben, így a DC és AK szakaszok egyenlő hosszúságúak és párhuzamosak, tehát $AK = \frac{AB}{3}$. (1 pont)

Ahonnán

$$T_{AKD} = T_{DKC} = \frac{T_{CKB}}{2}, \quad (1 \text{ pont})$$

így

$$\frac{T_{AKD}}{T_{DKBC}} = \frac{1}{3}. \quad (1 \text{ pont})$$

■