

VII. Nemzetközi Magyar Matematikaolimpia
Marosvásárhely, 2025. május 2.

VIII. osztály

1. feladat (10 pont). Oldd meg az $x^2 - xy + 45y = 2027$ egyenletet az egész számok halmazán!
(Kovács Béla, Szatmárnémeti)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Az egyenletet átrendezzük, csoportosítunk, kiemelünk és kapjuk, hogy

$$y(45 - x) = 2027 - x^2. \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $x = 45$ nem származtat megoldást, ezért feltételezhetjük, hogy $45 - x \neq 0$,
így oszthatunk vele. Tehát (1 pont)

$$y = \frac{2027 - x^2}{45 - x},$$

vagyis

$$y = \frac{x^2 - 2027}{x - 45}. \quad (1 \text{ pont})$$

A fenti tört számlálóját átalakítjuk a következőképpen

$$y = \frac{x^2 - 2025 - 2}{x - 45} = \frac{x^2 - 45^2 - 2}{x - 45} = \frac{(x - 45)(x + 45) - 2}{x - 45} = x + 45 - \frac{2}{x - 45}. \quad (2 \text{ pont})$$

A y egész szám kell legyen, ezért a fenti tört nevezője csak ± 1 vagy ± 2 lehet.
Ezt a négy esetet vizsgáljuk és a következő megoldásokat kapjuk (1 pont)

$$\begin{cases} x = 46, y = 89; \\ x = 44, y = 91; \\ x = 43, y = 89; \\ x = 47, y = 91. \end{cases} \quad (2 \text{ pont})$$

Ezek a számpárok az egyenlet megoldásai az egyenletnek az egész számok körében. ■

2. feladat (10 pont). Egy 4 egységélű, kékszínű anyagból készült kocka felszínét pirosra festjük, majd a kockát a lapjaival párhuzamos síkokkal n^3 darab egyforma kiskockákra bontjuk. Úgy választjuk meg az n számot, hogy a keletkezett kiskockák teljes felszíneinek összege 32-szerese legyen az eredeti kocka felszínének. (Egy kocka felszíne, a hat lapjának területösszege.)

a) Hány kiskockának van csak kékszínű lapja?

b) Alkotható-e 721 egyforma méretű kocka az összes olyan kiskocka felhasználásával, amelynek van legalább egy piros lapja?

(Császár Sándor, Csíkszereda)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Egy n^3 kiskockából összerakott nagykocka külső rétegeit lebontva, egy $(n-2)^3$ csak kékszínű kiskockából álló nagykockát nyerünk, hisz a külső rétegeket képező kockák egy, két vagy három oldala piros. (2 pont)

A kocka felszíne $6 \cdot 4^2$, egy kiskocka felszíne $6 \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^2$. (1 pont)

A feltevésből következik, hogy

$$32 \cdot 6 \cdot 4^2 = 6 \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^2 \cdot n^3,$$

ahonnan az következik, hogy $n = 32$. Tehát a kiskockák száma 32^3 . (2 pont)

Végezetül pedig a csupa kék kiskockák száma $(32-2)^3 = 30^3$. (1 pont)

b) A piros-kék lapú kockák száma $32^3 - 30^3$. (1 pont)

A következő átalakítást végezzük

$$32^3 - 30^3 = 2^3 \cdot 16^3 - 2^3 \cdot 15^3 = 2^3 \cdot (16^3 - 15^3) = 2^3 \cdot 721.$$

Tehát 721 db. 8 kiskockából álló egyforma kocka alkotható. (2 pont)



3. feladat (10 pont). Hány olyan nyolcjegyű pozitív egész szám van, amely első öt számjegyének a szorzata 2025 és az utolsó négy számjegyének a szorzata is 2025?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

A $2025 = 5^2 \cdot 3^4$ számjegyekkel felírt szorzattá bontása az 1, 3, 5 és 9 számjegyekkel lehetséges.

(1 pont)

Megvizsgáljuk, ezekkel a számjegyekkel hány féle módon alakíthatjuk a 2025-ös szorzatot öt, illetve négy számjegyet használva. Ennek fényében az első öt számjegy valamilyen sorrendben a következő lehet

A.) 1; 5; 5; 9; 9 B.) 3; 3; 5; 5; 9.

(1 pont)

Az utolsó négy számjegy valamilyen sorrendben a következő lehet

C.) 5; 5; 9; 9.

(1 pont)

Az ötödik számjegy szerepel az első öt és az utolsó négy számjegy között is, ezért ez a számjegy csak az 5-ös vagy a 9-es lehet. Ezt figyelembe véve a következő lehetőségeink vannak: (1 pont)

1. eset Az első öt számjegy A típusú és az utolsó négy számjegy C típusú. Akár 5-ös, akár 9-es az ötödik számjegy, az első négy számjegy sorrendjére $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$ lehetőség van. (1 pont)

És ezen belül minden esetben az utolsó három számjegy sorrendjére $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ lehetőség van. Tehát ebben az esetben $2 \cdot 12 \cdot 3 = 72$ ilyen számot találunk. (1 pont)

2. eset Az első öt számjegy B típusú és az utolsó négy számjegy C típusú. Ha 5-ös az ötödik számjegy, akkor az első négy számjegy sorrendjére $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$ lehetőség van. (1 pont)

Ha 9-es az ötödik számjegy, akkor az első négy számjegy sorrendjére $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6$ lehetőség van.

(1 pont)

És ezen belül minden esetben az utolsó három számjegy sorrendjére $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ lehetőség van. Tehát ebben az esetben $(12 + 6) \cdot 3 = 54$ ilyen számot találunk.

Összesen $72 + 54 = 126$ ilyen nyolcjegyű szám van.

(1 pont)



4. feladat (10 pont). Az $ABCD$ paralelogrammában $AB \neq AD$ és A tompaszög. A BD átló O felezőpontjában merőlegest állítunk a BD átlóra, amely a BC oldalt az E pontban metszi, és a C ponton áthaladó BD -vel párhuzamos egyenest az M pontban metszi. Legyen F a DE és CM egyenesek metszéspontja.

a) Igazold, hogy a $BDCF$ négyszög egyenlő szárú trapéz!

b) Határozd meg az FC szakasz azon H pontját, amelyre az AHO háromszög kerülete a lehető legkisebb!

(Mátéfi István, Marosvásárhely)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Rajz helyes elkészítése.

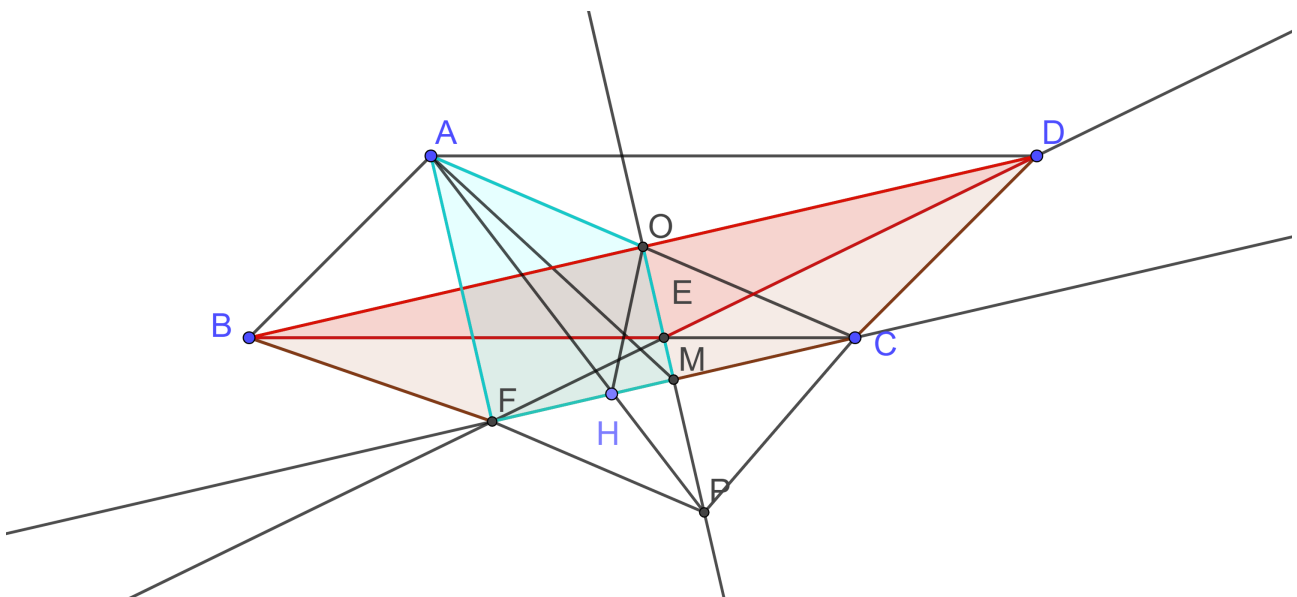
(1 pont)

Mivel $OE \perp BD$ ezért $\angle BOE = \angle DOE$, továbbá $OE = OE$ és $BO = OD$, ezért $\triangle BOE \cong \triangle DOE$. A két háromszög egybevágóságából azt kapjuk, hogy $BE = DE$ és $\angle ODE = \angle OBE$. (2 pont)

Mivel $BD \parallel FC$ ezért $\angle ODE = \angle FME$ és $\angle OBE = \angle ECM$, ahonnan azt kapjuk, hogy $\angle FME = \angle ECM$. Tehát az $\triangle FEC$ háromszög egyenlő szárú. (1 pont)

Felhasználva, hogy $FE = EC$, $\angle BEF = \angle DEC$ és $BE = DE$ következik, hogy $\triangle BEF \cong \triangle DEC$, amiből az következik, hogy $\angle BFE = \angle DCE$ és $BD \parallel FC$. Tehát a $BDCF$ egyenlő szárú trapéz.

(2 pont)



b) Mivel $OM \perp BD$ és $BD \parallel FC$, ezért $OM \perp FC$. Legyen a P az O pont szimmetrikusa az FC egyenesre nézve. (1 pont)

Az FC egyenes bármelyik pontját is válasszuk H -nak, igaz, hogy $AH + HO = AH + HP$. Tehát H -t az AP és FC egyenesek metszéspontjaként választva kapjuk a minimális $AH + HO$ összeget.

(1 pont)

Tehát a megszerkesztett H pontra az AHO_{Δ} háromszög kerülete a lehető legkisebb. Az AFH_{Δ} és PMH_{Δ} háromszögek hasonlóságából kapjuk, hogy $FH = 2HM$. Tehát a H az FC szakasz első harmadoló pontja. (1 pont)

■

5. feladat (10 pont). Nevezzük $n-L$ dominónak azokat az L -alakú alakzatokat, amelyek vízszintes és függőleges része is n db. egységnégyzetet tartalmaz a saroknégyzettel együtt (az $1-L$ dominó maga az egységnégyzet), ahol n egy tetszőleges pozitív egész. Rendelkezésünkre áll a következő 2025 db. $n-L$ dominó : $1-L, 2-L, \dots, 2024-L, 2025-L$.

a) Határozd meg azokat az egységnégyzetekből felépített téglalapokat, melyek lefedhetőek átfedés- és hézagmentesen ezen dominók mindegyikének a felhasználásával!

b) Hányféleképpen fedhető le átfedés- és hézagmentesen egy 2025×2025 -ös egységnégyzetekből alkotott négyzet ezen dominók segítségével? (Két lefedés különbözik, ha van olyan egységnégyzet, amely más-más méretű dominóban jelenik meg a két lefedésben.)

c) Kijelöltünk egy tetszőleges egységnégyzetet a fenti 2025×2025 -ös négyzeten, és ráhelyezzük az $1-L$ dominót. Lefedhető-e átfedés- és hézagmentesen, a kiválasztástól függetlenül, a fennmaradó rész a megmaradó dominók segítségével?

(Barta-Zágoni Csongor, Marosvásárhely)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Legyen a keresett egységnégyzetekből felépített téglalap mérete $a \times b$. Ahhoz, hogy elhelyezhessük a $2025-L$ dominót, vízszintesen és függőlegesen is legalább 2025 négyzetre van szükség, tehát $a \geq 2025$ és $b \geq 2025$. (1 pont)

Mivel az $n-L$ dominó $2 \cdot n - 1$ db. egységnégyzetet fed le, ezért összesen

$$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + \dots + (2 \cdot 2025 - 1) = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 2025) - 2025 = 2025 \cdot 2026 - 2025 = 2025^2$$

egységnégyzetet fedünk le.

(1 pont)

Ugyanakkor $a \cdot b \geq 2025^2$, tehát itt egyenlőség kell fennáljon, vagyis $a = 2025$, $b = 2025$. Tehát az egyedüli lefedhető téglalap a 2025×2025 -ös négyzet. (1 pont)

b) Kezdjük a $2025-L$ dominóval. A méretéből adódóan ez a nagy négyzet peremén lesz, és pontosan 3 sarkát fedi le a nagy négyzetnek. Elhelyezésére négy lehetőségünk van, hiszen ki kell választanunk a nagy négyzet négy sarka közül, hogy melyik legyen az L alak sarka.

(1 pont)

Miután ezt elhelyeztük, a fennmaradó rész egy 2024×2024 -es négyzet, így hasonlóan négy lehetőségünk lesz a $2024-L$ elhelyezésére.

(1 pont)

Ezt az okoskodást folytatva eljutunk egy 2×2 -es négyzethez, ahová a $2-L$ négyféleképpen tehető le, majd a legvégén 1 egységnégyzet marad, így az $1-L$ beillesztésébe egy lehetőségünk marad. Tehát összesen 4^{2024} különböző lefedés létezik.

(1 pont)

c) Használjuk fel a b.) pont gondolatmenetét. Kezdjük megint a legnagyobb méretű dominótól, azt helyezzük el tetszőlegesen, majd haladjunk tovább csökkenő sorrendben a kisebbekig, és ismételjük ezt az eljárást. Akkor lehet probléma, ha elérkezünk egy olyan $n \times n$ -es négyzethez, amelynek a peremén helyezkedik el az $1-L$.

Ha ez egy saroknégyzet, akkor helyezzük el az éppen aktuális dominót (ami egy $n-L$ dominó) úgy, hogy annak sarka ezzel a saroknégyzettel átlósan szemben legyen.

(1 pont)

Ha pedig csak a peremén van, de nem sarok négyzet, akkor az $n-L$ sarkának válasszuk a szembenfekvő oldal egyik sarkát.

(1 pont)

Mivel ez az eljárás egészen a végéig folytatható, így mindig lesz lehetőségünk valahova elhelyezni az aktuális legnagyobb dominót, tehát bárhol helyezkedik el az $1-L$, lefedhető a négyzet fennmaradó része a többi dominó segítségével.

(1 pont)

