

VII. Nemzetközi Magyar Matematikaolimpia
Marosvásárhely, 2025. május 2.

VIII. osztály

- 1. feladat.** Oldd meg az $x^2 - xy + 45y = 2027$ egyenletet az egész számok halmazán!
- 2. feladat.** Egy 4 egységélű, kékszínű anyagból készült kocka felszínét pirosra festjük, majd a kockát a lapjaival párhuzamos síkokkal n^3 darab egyforma kiskockákra bontjuk. Úgy választjuk meg az n számot, hogy a keletkezett kiskockák teljes felszíneinek összege 32-szerese legyen az eredeti kocka felszínének. (Egy kocka felszíne, a hat lapjának területösszege.)
- a) Hány kiskockának van csak kékszínű lapja?
- b) Alkotható-e 721 egyforma méretű kocka az összes olyan kiskocka felhasználásával, amelynek van legalább egy piros lapja?
- 3. feladat.** Hány olyan nyolcjegyű pozitív egész szám van, amely első öt számjegyének a szorzata 2025 és az utolsó négy számjegyének a szorzata is 2025?
- 4. feladat.** Az $ABCD$ paralelogrammában $AB \neq AD$ és A tompaszög. A BD átló O felezőpontjában merőlegest állítunk a BD átlóra, amely a BC oldalt az E pontban metszi, és a C ponton áthaladó BD -vel párhuzamos egyenest az M pontban metszi. Legyen F a DE és CM egyenesek metszéspontja.
- a) Igazold, hogy a $BDCF$ négyszög egyenlő szárú trapéz!
- b) Határozd meg az FC szakasz azon H pontját, amelyre az AHO háromszög kerülete a lehető legkisebb!
- 5. feladat.** Nevezzük $n-L$ dominónak azokat az L -alakú alakzatokat, amelyek vízszintes és függőleges része is n db. egységnégyzetet tartalmaz a saroknégyzettel együtt (az $1-L$ dominó maga az egységnégyzet), ahol n egy tetszőleges pozitív egész. Rendelkezésünkre áll a következő 2025 db. $n-L$ dominó : $1-L, 2-L, \dots, 2024-L, 2025-L$.
- a) Határozd meg azokat az egységnégyzetekből felépített téglalapokat, melyek lefedhetőek átfedés- és hézagmentesen ezen dominók mindegyikének a felhasználásával!
- b) Hányféleképpen fedhető le átfedés- és hézagmentesen egy 2025×2025 -ös egységnégyzetekből alkotott négyzet ezen dominók segítségével? (Két lefedés különbözik, ha van olyan egységnégyzet, amely más-más méretű dominóban jelenik meg a két lefedésben.)
- c) Kijelöltünk egy tetszőleges egységnégyzetet a fenti 2025×2025 -ös négyzeten, és ráhelyezzük az $1-L$ dominót. Lefedhető-e átfedés- és hézagmentesen, a kiválasztástól függetlenül, a fennmaradó rész a megmaradó dominók segítségével?