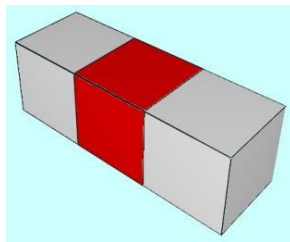


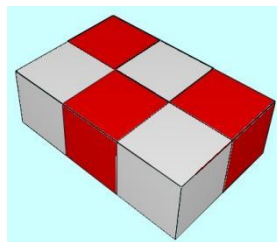
## II. FORDULÓ MEGOLDÁSOK

### 1. feladat

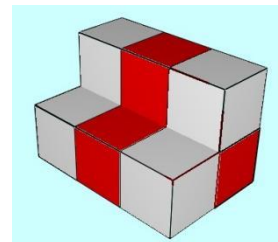
Tamásnak 9 egyforma méretű építőkockája van, 4 piros és 5 fehér. Két fehér és egy piros kockákból kirakta az 1. ábrán látható testet, majd a megmaradt 6 kockából a 2. ábrán látható testet. Végül a két testet egymásra illesztette amint az a 3. ábrán látható.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Figyeld meg az 3. ábrát, majd válaszolj a kérdésekre!

- Hány piros oldallap érintkezik fehér oldallappal? (Két oldallap érintkezik, ha fedik egymást.)
- Hány piros él érintkezik fehér éllel? (Két él érintkezik, ha van legalább két közös pontjuk.)
- A piros kockák csúcsai közül összesen hány érintkezik a fehér kockák csúcsaival?

### Megoldás:

<p><b>a)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Az alsó szinten (2. ábra) a sarkokban található piros kockáknak a szomszédja 2-2 fehér kocka, így 4 piros lap érintkezik fehér lappal, a középen található piros kocka három oldallapja érintkezik egy-egy fehér kocka oldallapjával. Tehát az alsó szinten 7 piros oldallap érintkezik fehér oldallappal.</li> <li>- A második szinten (1. ábra) a középső piros kocka a két fehér kocka egy-egy oldallapjával érintkezik, tehát 2 piros oldallap érintkezik fehér oldallappal.</li> <li>- Az első két test egymásra helyezése következtében az első test mindhárom kockája egy-egy más színű kockára kerül, tehát így újabb 3 piros oldallap érintkezik fehér oldallappal.</li> <li>- A 3. ábrán látható testben 12 piros oldallap érintkezik fehér oldallappal.</li> </ul>	<p><b>4 pont:</b></p> <p>1 p.: Az alsó szinten 7 piros oldallap érintkezik fehér lappal.</p> <p>1 p.: A második szinten található piros kocka két lapja érintkezik fehér kocka egy-egy lapjával.</p> <p>1 p.: A két test egymásra helyezése következtében 3 piros lap érintkezik fehér lappal.</p> <p>1 p.: 12 piros oldallap</p>
<p><b>b)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Az alsó szinten (2. ábra) a sarkokban található piros kockákat 2-2 fehér kocka vesz körbe. Egy ilyen piros kocka 7 éle érintkezik fehér éllel (a piros kocka két belső lapján található élek), tehát a sarkokban található piros kockák esetében összesen <math>2 \times 7 = 14</math> piros él érintkezik fehér éllel.</li> <li>- Az alsó szinten a középen található piros kocka 10 éle érintkezik a fehér kockák élével (a piros kocka 12 éléből a külső oldallapon található alsó és felső él nem érintkezik fehér éllel), tehát ezen a szinten <math>14+10=24</math> piros él érintkezik fehér éllel.</li> </ul>	<p><b>5 pont:</b></p> <p>1 p.: Az alsó szinten, a sarkokban található piros kockák 14 éle érintkezik fehér éllel.</p> <p>1 p.: Az első szinten a középen található piros kocka 10 éle érintkezik a fehér kockák élével.</p>



XXIII. BRENYÓ MIHÁLY ORSZÁGOS PONTSZERZŐ  
MATEMATIKAVESENENY  
3-4. osztály  
2023-2024-es tanév



<p>- A második szinten (1. ábra) a középső piros kocka 8 éle érintkezik a fehér kockák egy-egy élével.</p> <p>- A két test egymásra helyezése következtében újabb 6 piros él érintkezik fehér éllel. (Az alsó szinten található piros kockák felső élei közül a két külső, valamint a felső piros kocka alsó lapján lévő két él).</p> <p>- Tehát összesen <math>24+8+6=38</math> piros él érintkezik fehér éllel.</p> <p><b>Vagy:</b> Megszámoljuk, hogy a piros kockák hány éle nem érintkezik fehér éllel. Az alsó szinten a sarkokban lévő piros kockák 3-3 éle nem érintkezik fehér éllel, valamint a középső piros kockák 2-2 éle. Azaz <math>3 + 3 + 2 + 2 = 10</math> piros él nem érintkezik fehér éllel. Egy kockának 12 éle van, a négy piros kockának <math>4 \times 12 = 48</math> éle van. Mivel 10 él nem érintkezik fehér éllel, ezért <math>48 - 10 = 38</math> piros él érintkezik fehér éllel.</p>	<p>1 p.: A második szinten a középső piros kocka 8 éle érintkezik a fehér kockák egy-egy élével.</p> <p>1 p.: A két test egymásra helyezése következtében újabb 6 piros él érintkezik fehér éllel.</p> <p>1 p.: 38 piros él érintkezik fehér éllel.</p> <p><i>Megj. Ha más módszerrel, helyesen számolja meg az éleket, akkor is maximális pontszám adható.</i></p>
<p>c)</p> <p>- Az alsó szinten a sarkokban található piros kockákat 2-2 fehér kocka vesz közre. Egy ilyen piros kocka 6 csúcsa érintkezik fehér csúccsal (2 csúcs - a külső csúcsok - nem érintkezik fehér csúccsal), tehát itt összesen 12 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal.</p> <p>- A középben található piros kocka mind a 8 csúcsa érintkezik a fehér kocka valamely csúcsával, tehát ezen a szinten 20 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal.</p> <p>- A második szinten a középső piros kocka mind a 8 csúcsa érintkezik a fehér kocka egy-egy csúcsával.</p> <p>- A két test egymásra helyezése következtében újabb 2 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal (az alsó szinten található piros kockák külső csúcsai).</p> <p>- Tehát összesen <math>20 + 8 + 2 = 30</math> csúcs érintkezik fehér csúccsal.</p> <p><b>Vagy:</b> Megszámoljuk, hány piros csúcs nem érintkezik fehér csúccsal. Az alsó szinten a sarkokban lévő piros kockák 1-1 csúcsa nem érintkezik fehér csúccsal, azaz 2 piros csúcs nem érintkezik fehérrel. Egy kockának 8 csúcsa van, a négy kockának <math>4 \times 8 = 32</math> csúcsa van. Így <math>32 - 2 = 30</math> piros csúcs érintkezik fehér csúccsal.</p>	<p><b>5 pont:</b></p> <p>1 p.: Az első szinten a sarkokban található piros kockák 12 csúcsa érintkezik fehér csúccsal.</p> <p>1 p.: Az első szinten a középben található piros kocka 8 csúcsa érintkezik a fehér csúccsal</p> <p>1 p.: A második szinten a középső piros kocka 8 csúcsa érintkezik a fehér kocka egy-egy csúcsával.</p> <p>1 p.: A két test egymásra helyezése következtében újabb 2 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal.</p> <p>1 p.: 30 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal.</p> <p><i>Megj. Ha más módszerrel, helyesen számolja meg a csúcsokat, akkor is maximális pontszám jár.</i></p>
<p><b>Felelet:</b> Az ábrán látható testben 12 piros oldallap érintkezik fehér oldallappal, 38 piros él érintkezik fehér éllel, és 30 piros csúcs érintkezik fehér csúccsal.</p>	<p><b>1 p.:</b> Helyes felelet</p>
	<p><b>Összpontszám: 15 pont</b></p>



XXIII. BRENYÓ MIHÁLY ORSZÁGOS PONTSZERZŐ  
MATEMATIKAVESENY  
3-4. osztály  
2023-2024-es tanév



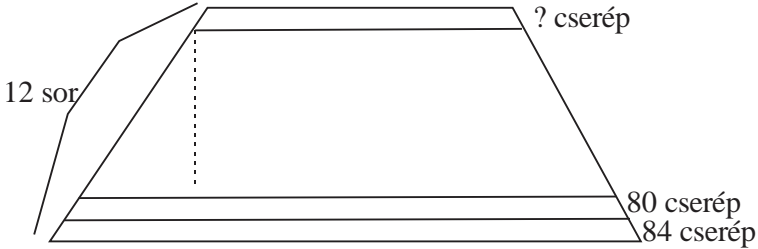
**2. feladat**

Az iskola egyik tetőrészének cseréppel való fedésekor 12 sorban helyezik el a cserepeket úgy, hogy a legalsó sorba 84 cserép kerül, és minden következő sorba 4-gyel kevesebb.

- a) Hány cserép volt a legfelső sorban?
- b) Összesen hány cserépre volt szükség a tetőrész fedéséhez?

Készíts ábrát is a megoldáshoz! Írd le részletesen, hogyan gondolkodtál!

**Megoldás:**

<p>a)</p> <p>A feladat adataiból kitűnik, hogy a szóban forgó tetőrész trapéz alakú lehet, mert a cserepek száma soronként 4-gyel csökken.</p>  <p>A megoldáshoz egy olyan csökkenő sorrendű számsort írhatunk fel, amelynek első tagja 84, tagjainak száma pedig 12. A számsor tagjai 4-esével csökkennek. Ki kell számítanunk a számsor utolsó, 12. tagját, hogy megtudjuk, hány cserép volt a legfelső sorban. 84; 80; 76; 72.....?</p> <p>Mivel 12 sor cserép van, a számsor 11 tagját csökkentjük 4-gyel, mert a 12. tag (az utolsó), már nem csökken (12-1=11).</p> <p>Következik, hogy <math>11 \times 4 = 44</math>-gyel kevesebb cserép van a legfelső sorban, mint a legalsóban.</p> <p>Ez azt jelenti, hogy a számsor utolsó tagja 44-gyel kevesebb az elsőnél. A számsor 12. tagja <math>84 - 44 = 40</math>. Tehát 40 cserép van a legfelső sorban.</p>	<p><b>5 pont:</b></p> <p>1p.: Helyes, trapéz alakú ábra</p> <p>1 p.: A számsor helyes felírása</p> <p>1p.: A számsor építkezési szabályának meghatározása</p> <p>1p.: A legalsó és a legfelső sorban levő cserepek száma közötti különbség meghatározása</p> <p>1p.: A számsor 12. tagjának, azaz a legfelső sorban lévő cserepek számának meghatározása</p>
--	--



XXIII. BRENYÓ MIHÁLY ORSZÁGOS PONTSZERZŐ  
MATEMATIKAVESENY  
3-4. osztály  
2023-2024-es tanév



<p>b)</p> <p>Ahhoz, hogy megtudjuk, hány cserépre volt szükség a tetőrész fedéséhez, össze kell adnunk a 12 sorban levő cserepek számát. Ehhez az a) pontban felírt számsort használhatjuk fel.</p> <p>Átírjuk többtagú összeadás formájában: <math>40 + 44 + 48 + 52 + \dots + 76 + 80 + 84</math></p> <p>Az összeadás tagjaiból azonos összegű párokat alkotunk, ezeket megszorozzuk 6-tal (mert <math>12 : 2 = 6</math> pár van), és megkapjuk a számsor tagjainak összegét, vagyis a fedéshez szükséges cserepek számát: <math>(40 + 84) + (44 + 80) + (48 + 76) + \dots = 124 \times 6 = 744</math></p> <p style="text-align: center;">6-szor</p> <p>Tehát a tetőrész fedéséhez 744 cserepet használtak fel.</p> <p>Vagy:</p> $\begin{array}{r} 40 + 44 + 48 + 52 + \dots + 76 + 80 + 84 \\ 84 + 80 + 76 + 72 + \dots + 48 + 44 + 40 \\ \hline 124 + 124 + 124 + \dots + 124 + 124 + 124 = 124 \times 12 : 2 = 744 \end{array}$ <p style="text-align: center;">12-szer</p>	<p><b>b) 6 pont:</b></p> <p>1p.: Megállapítja, hogy össze kell adnia a 12 sorban levő cserepek számát.</p> <p>1p.: Átírja a számsort Gauss összeggé.</p> <p>1p.: Helyes csoportosítás</p> <p>1p.: A csoportok számának helyes meghatározása</p> <p>1p.: A csoportok összegének meghatározása</p> <p>1p.: A Gauss összeg helyes kiszámítása (szorzás)</p> <p><b>Megj.</b> Ha egyenként összeadva kapja meg a helyes eredményt, akkor 5 pont jár. Ha a Gauss összegtől eltérő, más logikus gondolatmenetet használva (megindokolva azt) adja össze a számokat, akkor 6 pont jár.</p>
<p><b>Felelet:</b></p> <p>a) 40 cserép van a legfelső sorban.</p> <p>b) A tetőrész újra cserepezéséhez 744 cserepet használtak fel.</p>	<p><b>2p.:</b> Helyes feleletek</p>
	<p><b>Összpontszám: 13 pont</b></p>



XXIII. BRENYÓ MIHÁLY ORSZÁGOS PONTSZERZŐ  
MATEMATIKAVESENY  
3-4. osztály  
2023-2024-es tanév



### 3. feladat

Anett a hétvégét nagyszüleinél töltötte. Táskájába négy-négy nadrágot és pólót csomagolt be. A nadrágok és a pólók fehér, zöld, piros és kék színűek voltak.

a) Hányféleképpen tud Anett nadrágot és pólót is felvenni?

b) Hányféleképpen tud Anett nadrágot és pólót is felvenni, ha soha nem vesz magára ugyanolyan színű nadrágot és pólót?

#### Megoldás:

a)

- Ha Anett fehér pólót választ, akkor a nadrágot négyféleképpen tudja kiválasztani.

- Ha zöld pólót választ, akkor is négyféleképpen tud nadrágot választani.

Hasonló a helyzet a piros és a kék színű pólók esetében is. Tehát Anett összesen 16 különböző módon tud nadrágot és pólót társítani.

#### Vagy

- Jelöljük a színeket a kezdőbetűkkel: fehér-F, zöld-Z, piros-P és kék-K.

Nadrág \ Póló	F	Z	P	K
F	F-F	F-Z	F-P	F-K
Z	Z-F	Z-Z	Z-P	Z-K
P	P-F	P-Z	P-P	P-K
K	K-F	K-Z	K-P	K-K

#### 5 pont:

1p.: Ha Anett fehér pólót választ, akkor 4 nadrágot társíthat mellé.

1p.: Ha Anett zöld pólót választ, akkor 4 nadrágot társíthat mellé.

1p.: Ha Anett piros pólót választ, akkor 4 nadrágot társíthat mellé.

1p.: Ha Anett kék pólót választ, akkor 4 nadrágot társíthat mellé.

1p.: Összesen 16 lehetősége van Anettnek.



XXIII. BRENÝÓ MIHÁLY ORSZÁGOS PONTSZERZŐ  
MATEMATIKÁVERSENY  
3-4. osztály  
2023-2024-es tanév



<p>b)</p> <p>Ha Anett fehér pólót választ, akkor a nadrágot 3 nadrágot társíthat mellé.</p> <p>Ha zöld pólót választ, akkor is 3 nadrágot tud társítani mellé.</p> <p>Hasonló a helyzet a piros és a kék színű pólók esetében is.</p> <p>Tehát összesen 12 módon tud Anett felöltözni különböző színű nadrággal és pólóval.</p> <p><b>Vagy:</b></p> <p>A táblázatban megadott 16 lehetőségből 4 esetben azonos színű a nadrág és a póló. Tehát a megmaradt 12 esetben (<math>16 - 4 = 12</math>) Anett különböző színű nadrágot és pólót tud magára venni.</p>	<p><b>5 pont:</b></p> <p>1p.: Ha Anett fehér pólót választ, akkor 3 más színű nadrágot társíthat mellé.</p> <p>1p.: Ha Anett zöld pólót választ, akkor 3 más színű nadrágot társíthat mellé.</p> <p>1p.: Ha Anett piros pólót választ, akkor 3 más színű nadrágot társíthat mellé.</p> <p>1p.: Ha Anett kék pólót választ, akkor 3 más színű nadrágot társíthat mellé.</p> <p>1p.: Összesen 12 lehetősége van Anettnek.</p> <p><i>A maximális pontszám minden alpont esetében megadható akkor is, ha táblázattal indokol.</i></p>
<p><b>Felelet:</b></p> <p>a) Anettnek 16 lehetősége van.</p> <p>b) Ha más-más színű nadrágot és pólót vesz fel, akkor 12 lehetősége van.</p>	<p><b>2p.:</b> Helyes felelet</p>
	<p><b>Összpontszám: 12 pont</b></p>



XXIII. BRENYÓ MIHÁLY ORSZÁGOS PONTSZERZŐ  
MATEMATIKAVESENÝ  
3-4. osztály  
2023-2024-es tanév



#### 4. feladat

Egy osztályban 35 tanuló van, a fiúk száma 2-vel nagyobb a lányok számának felénél.

- Igazold, hogy legalább 4 lány a hét ugyanazon napján született!
- Hány fiú születhetett ugyanabban a hónapban?

Válaszod indokold!

#### Megoldás:

<p><b>a)</b> Ki kell számítanunk az osztályba járó lányok és fiúk számát. Jelöljük a lányok számának felét <b>a</b>-val:</p> <p>Az osztályba járó tanulók száma kettővel több, mint az osztályba járó lányok felének a háromszorosa:</p> $35 = 3 \times a + 2$ $a = (35 - 2) : 3$ $a = 33 : 3$ $a = 11 \text{ (a lányok fele)}$ <p>Az osztályba <math>11 \times 2 = 22</math> lány jár.</p> <p>Ha az osztálylétszám 35 és közülük 22 lány, akkor <math>35 - 22 = 13</math> fiú van az osztályban.</p> <p>Egy hét 7 napból áll. <math>22 : 7 = 3</math>, maradék 1 <math>\rightarrow</math> Eggyel több lány van, mint a napok számának háromszorosa. Ez azt jelenti, hogy ha a hét minden napján ugyanannyi lány született volna, akkor minden napra 3 lány jutna. Ebben az esetben azonban <math>3 \times 7 = 21</math> lánynak kellene lennie az osztályban. Mivel eggyel többen vannak, következik, hogy a hét egyik napján legalább 4 lány született.</p>	<p><b>7 pont:</b> 2p.: Helyes ábrázolás</p> <p>1p.: A lányok számának meghatározása</p> <p>1p.: A fiúk számának meghatározása</p> <p>3p.: Annak igazolása, hogy legalább 4 lány a hét ugyanazon napján született</p>
<p><b>b)</b> Egy év 12 hónapból áll. A fiúk száma eggyel több a hónapok számánál. Ezért ha minden fiú más-más hónapban született is, a 13. valamelyik fiúval azonos a hónapban kellett szülessen. Tehát legalább két fiú született ugyanabban a hónapban.</p>	<p><b>2pont:</b> 2p.: Annak indoklása, hogy legalább két fiú született ugyanabban a hónapban</p>
<p><b>Felelet:</b> b) Legalább két fiú született ugyanabban a hónapban.</p>	<p><b>1p.: Helyes felelet</b> <b>Összpontszám: 10 pont</b></p>



XXIII. BRENYÓ MIHÁLY ORSZÁGOS PONTSZERZŐ  
MATEMATIKAVESENÝ  
3-4. osztály  
2023-2024-es tanév



### 5. feladat

Add össze Bolyai Farkas születési évszámának számjegyeit, az így kapott számot növelj azzal a számmal, amelyik a születésének napját jelöli, majd az összeget szorozd meg 5-tel.

a) Írd le a kapott eredményt! Válaszod indokold!

b) Kati leírta az a) pontban kapott eredményt, majd a fenti gondolatmenetet megismételte: a szám számjegyeit összeadta, növelte 9-cel, az összeget megszorozta 5-tel, és leírta az így kapott számot. A számsort ugyanígy folytatta tovább. Melyik volt az ötvenedik szám, amit Kati leírt? Írd le lépésenként, hogyan gondolkodtál!

### Megoldás:

<p>a) Bolyai Farkas 1775. február 9-én született. Bolyai Farkas születésének napja: 9.</p> <p>Az évszám számjegyeinek összege: <math>1 + 7 + 7 + 5 = 20</math> <math>(20 + 9) \times 5 = 29 \times 5 = 145</math>.</p>	<p><b>2 pont:</b></p> <p>1p.: Leírja Bolyai Farkas születésének évét és napját.</p> <p>1p.: Kiszámítja a kért művelet-sor eredményét.</p>
<p>b) Kati által leírt számok:</p> <p>① <math>(20 + 9) \times 5 = 145</math> ② <math>1 + 4 + 5 = 10 \rightarrow (10 + 9) \times 5 = 19 \times 5 = 95</math> ③ <math>9 + 5 = 14 \rightarrow (14 + 9) \times 5 = 23 \times 5 = 115</math> ④ <math>1 + 1 + 5 = 7 \rightarrow (7 + 9) \times 5 = 16 \times 5 = 80</math> ⑤ <math>8 + 0 = 8 \rightarrow (8 + 9) \times 5 = 17 \times 5 = 85</math> ⑥ <math>8 + 5 = 13 \rightarrow (13 + 9) \times 5 = 22 \times 5 = 110</math> ⑦ <math>1 + 1 + 0 = 2 \rightarrow (2 + 9) \times 5 = 11 \times 5 = 55</math> ⑧ <math>5 + 5 = 10 \rightarrow (10 + 9) \times 5 = 19 \times 5 = 95</math></p> <p>- Észre vesszük, hogy a számsor 8. tagja megegyezik a 2. taggal. Ez azt jelenti, hogy a 8. tagtól kezdve a számok periódikusan fognak ismétlődni. A periódust hat szám alkotja: 95; 115; 80; 85; 110; 55</p> <p>- A Kati által leírt számok sorrendje a következő lesz: 145; <b>95; 115; 80; 85; 110; 55; 95; 115; 80; 85; 110; 55; 95;.....</b></p> <p>- Tehát Kati egy olyan számsort írt le, amelyben a 2. számtól kezdődően egy hattagú periódus fog ismétlődni.</p> <p>- Ahhoz, hogy a számsor 50. tagját meg tudjuk határozni, az 50-ből kivonunk 1-et, mert az első tag nem ismétlődik.</p> <p>- A kapott különbséget elosztjuk 6-tal, mert az ismétlődő periódus 6 számból áll: <math>(50 - 1) : 6 = 8, \text{maradék} = 1</math></p> <p>- Mivel a maradék 1, azt jelenti, hogy a számsor 50. tagja a 9. periódus első száma lesz, azaz 95.</p>	<p><b>8 pont:</b></p> <p>4p.: Helyesen meghatározza a Kati által leírt első nyolc számot. (0,5 p./szám)</p> <p>1p.: Észreveszi és helyesen meghatározza az ismétlődő periódust (jelöli a periódust alkotó számokat).</p> <p>1.p.: Helyesen írja fel a számsort.</p> <p>1p.: Az 50-ből kivonja a 1-et, és megindokolja, hogy miért van erre szükség.</p> <p>1p.: Meghatározza a periódusok számát és a számsor 50. tagját.</p>
<p><b>Felelet:</b> a) A keresett szám: 145. b) A Kati által leírt 50. szám az 95.</p>	<p><b>2p.:</b> Helyes feleletek</p>
	<p><b>Összpontszám: 12 pont</b></p>