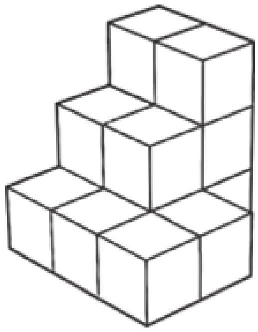
XXIV. BRENYÓ MIHÁLY REGIONÁLIS PONTSZERZŐ
MATEMATIKAVERSENY
3-4. osztály
2024-2025-ös tanév

MEGOLDÁSOK
2. forduló



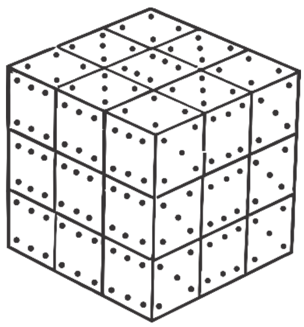
1. feladat:

a) Marika kis kockákkal játszik.
Legkevesebb hány kis kocka hiányzik ahhoz, hogy az ábrán levő elkezdett építmény egy nagy kockává alakuljon?
Írd le, hogyan gondolkodtál!

b) Péter, Marika bátyja, dobókockákból építi meg a nagy kockát úgy, hogy a külső lapokon található pöttyök összege a lehető legnagyobb legyen.
Számítsd ki, mennyi ez az összeg!
Írd le lépésről lépésre, hogyan gondolkodtál!
(Egy dobókocka lapjai 1-től 6-ig pontozottak, és a szemben fekvő lapokon a pöttyök összege mindig 7.)

1. feladat megoldása:

a) Az elkezdett építményt a legkevesebb kocka felhasználásával kell egy nagy kockává alakítani. Egy kockának minden oldaléle azonos hosszúságú kell legyen.
Amint az ábrán látható, az építménynek három szintje van.
Minden szinten három sorban és három oszlopban kell elhelyezni a kis kockákat.
Összesen 3 x 3 = 9 kis kockára van szükség minden szinten.
Marika az alsó szinten három sorban kezdte elhelyezni a kockákat. Mindhárom sorban három kis kocka kell legyen. Mivel a harmadik sorban csak kettő van, ide egy kis kockát pótol.
A középső szinten is 9 kis kockára lesz szükség. A már meglévő 2 + 2 = 4 kis kockát 9 – 4 = 5 kis kockával kell kipótolni.
A felső szint egyik sorában már van két kis kocka, ezért ide 9 – 2 = 7 kis kockát kell tenni.
A pótolt kis kockák száma megmutatja, hogy 1 + 5 + 7 = 13 kockával kell kiegészíteni az építményt ahhoz, hogy egy nagy kocka alakuljon ki belőle.



b) Egy kockának 6 oldallapja van. Egy dobókocka lapjai 1-től 6-ig pontozottak. Péter arra törekszik, hogy a külső lapokon a pöttyök száma a lehető legtöbb legyen.
A csúcsokban levő kis kockáknak három lapja képez külső oldalt. Péter úgy fordítja ezeket a kockákat, hogy 4, 5 és 6 pötty látszódjon rajtuk. Így a csúcsokat alkotó kockákon 4 + 5 + 6 = 15 pötty lesz látható.

Mivel egy kockának 8 csúcsa van, a csúcsokat alkotó kis kockákon összesen 15 x 8 = 120 pötty lesz látható.
A csúcsok közötti kis kockáknak csak két lapja látszik. Ezek a nagy kocka élei mentén, középen találhatók. Az ilyen kis kockákon a látható pöttyök száma 5 és 6 kell legyen, így összesen 5 + 6 = 11 pötty lesz látható. Mivel egy kockának 12 éle van, összesen 12 x 11 = 132 pötty lesz látható ezeken a kis kockákon.
Létezik hat olyan kis kocka, amelynek csak egy oldallapja látható. Ezek a nagy kocka oldallapjainak a közepén vannak. Ezért ezeket a kis kockákat Péter úgy fordítja, hogy 6 pötty legyen látható rajtuk. Az ilyen kockák lapjain összesen 6 x 6 = 36 pötty lesz látható.
Összesen 120 + 132 + 36 = 288 pötty látható a nagy kocka külső lapjain.

Felelet:
a) Legkevesebb 13 kockával kell kiegészíteni az építményt ahhoz, hogy egy nagy kocka alakuljon ki belőle.
b) Legtöbb 288 pötty látható a nagy kocka külső lapjain.

Pontozás:

a) 1 pont: az alsó szinten hiányzó kis kockák számának helyes meghatározása
0,5 pont: helyes indoklás
1 pont: a középső szinten hiányzó kis kockák számának helyes meghatározása
0,5 pont: helyes indoklás
1 pont: a felső szinten hiányzó kis kockák számának helyes meghatározása
0,5 pont: helyes indoklás
1 pont: a hiányzó kis kockák számának helyes összesítése
b) 1 pont: a nagy kocka csúcsaiban levő kis kockák pontjainak helyes meghatározása
0,5 pont: helyes indoklás
1 pont: a nagy kocka élei mentén középen található kis kockák pontjainak helyes meghatározása
0,5 pont: helyes indoklás
1 pont: a nagy kocka oldallapjainak a közepén található kis kockák pontjainak helyes meghatározása
0,5 pont: helyes indoklás
1 pont: a nagy kocka külső lapjain található pöttyök számának helyes összesítése
2 pont: helyes feleletek (1 pont/felelet)

Összpontszám: 13 pont

2. feladat

A 2024 olyan páros szám, amelynek számjegyei párosak, és az első három számjegy összege egyenlő az utolsó számjeggyel.

a) Hány ilyen szám létezik? Sorold fel, melyek ezek a számok! Írd le, hogyan gondolkodtál!

b) Számítsd ki a kapott számok összegét!

2. **feladat megoldása:**

a) Olyan $\overline{abcd}$ alakú számokat keresünk, amelyekben a, b, c és d páros számjegyek, valamint $a + b + c = d$.

Így $d = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$ lehet, de $d \neq 0$, mert ellenkező esetben mind a négy számjegy 0 kellene legyen, ami nem lehetséges.

Ha $d = 2$, akkor $a + b + c = 2 + 0 + 0$.

Ezekből a számjegyekből alkotott szám: 2002.

Ha $d = 4$, akkor $a + b + c = 4 + 0 + 0 = 2 + 2 + 0$.

Ezekből a számjegyekből alkotott számok: 4004, 2024, 2204.

Ha $d = 6$, akkor $a + b + c = 6 + 0 + 0 = 4 + 2 + 0 = 2 + 2 + 2$.

Ezekből a számjegyekből alkotott számok: 6006, 2406, 2046, 4206, 4026, 2226.

Ha $d = 8$, akkor $a + b + c = 8 + 0 + 0 = 6 + 2 + 0 = 4 + 4 + 0 = 4 + 2 + 2$.

Ezekből a számjegyekből alkotott számok: 8008, 2608, 2068, 6208, 6028, 4048, 4408, 4228, 2428, 2248.

Tehát 20 olyan négyjegyű szám van, amelynek számjegyei párosak és az első három számjegy összege egyenlő az utolsó számjeggyel.

b) A kapott számok összege: $2002 + 4004 + 2024 + 2204 + 6006 + 2406 + 2046 + 4206 + 4026 + 2226 + 8008 + 2608 + 2068 + 6208 + 6028 + 4048 + 4408 + 4228 + 2428 + 2248 = 73\,430$

Felelet: a) 20 olyan négyjegyű szám van, amelynek számjegyei párosak és az első három számjegy összege egyenlő az utolsó számjeggyel.

b) A kapott számok összege 73 430.

Pontozás:

a) 1 pont: az utolsó számjegy lehetséges értékeinek meghatározása
2 pont: az első négy helyes szám felírása és indoklása (0,5p x 4)
4 pont: a további 16 helyes szám felírása és indoklása (0,25p x 16)
Minden helytelen szám felírása 0,1 pont levonást jelent, de nem többet, mint 2 pont.

b) 3 pont: az összeg helyes kiszámítása
2 pont: a helyes feleletek felírása (1 pont/felelet)

Összpontszám: 12 pont

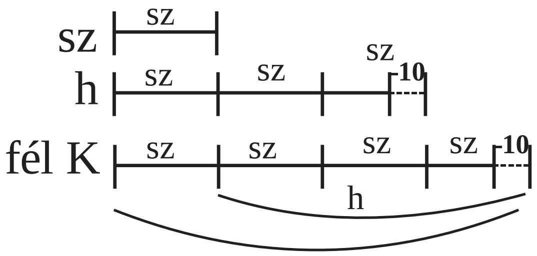
3. feladat

Ádám a nyári szünetnek egy részét nagyszüleinél töltötte. Egyik nap megmérte a zöldségeskert hosszúságát és szélességét, és a méretekből megállapította, hogy a kert téglalap alakú. A kert hosszúsága 10 méterrel kisebb volt, mint a szélességének a háromszorosa.

Határozd meg a zöldségeskert méreteit (hosszúságát és szélességét) tudva azt, hogy a kerülete 140 m.

Készíts ábrát! Írd le lépésről lépésre, hogyan gondolkodtál!

3. feladat megoldása:



fél K: 140m : 2 = 70m

A zöldségeskert téglalap alakú, jelöljük h-val a téglalap hosszúságát és sz-szel a téglalap szélességét. A téglalap kerülete a hosszúság és a szélesség összegének a kétszerese. A feltétel szerint a kerület 140m, tehát egy hosszúság és egy szélesség összege 140 m : 2 = 70 m.

Ha a hosszúság 10 méterrel nagyobb volna, akkor a hosszúság a szélesség háromszorosa lenne, és egy hosszúság és egy szélesség összege: 70m + 10m = 80m volna. Így a téglalap szélessége egyenlő 80m : 4 = 20m.

A téglalap hosszúsága: 3 x 20m – 10m = 50m

Ellenőrzés: A zöldségeskert kerülete 2 x 50m + 2 x 20m = 140m

Felelet: A zöldségeskert hosszúsága 50 méter, a szélessége 20 méter.

Pontozás:

2 pont: a téglalap kerülete a hosszúság és a szélesség összegének a kétszerese
2 pont: a hosszúság és a szélesség összegének a meghatározása
2 pont: helyes ábra, amelyen fel vannak tüntetve az adatok is
2 pont: a szélesség meghatározása
2 pont: a hosszúság meghatározása
2 pont: a helyes feleletek felírása (1 pont/felelet)

Összpontszám: 12 pont

4. feladat

Egy dobozban 5 piros, 8 sárga és 11 kék golyó van. Legkevesebb hány golyót kell kihúznunk csukott szemmel a dobozból, hogy biztosan legyen a kihúzottak között:

a) 1 piros golyó?
b) 2 különböző színű golyó?
c) 3 különböző színű golyó?

4. feladat megoldása:

a) Célunk egy piros golyó kihúzása. A dobozban 8 + 11 = 19 olyan golyó van, amely nem piros. Ha csak 19 golyót húzunk ki, még nem biztos, hogy a kihúzott golyók között van piros golyó. Tehát legkevesebb 20 golyót kell kihúzni a dobozból ahhoz, hogy biztosan legyen a kihúzottak között piros is.

b) Ahhoz, hogy 2 különböző színű golyót vehessünk ki a dobozból, meghatározzuk, hogy melyik színből van a legtöbb golyó. Mivel a kék golyókból van a legtöbb (11 darab), megtörténhet, hogy 11 golyót emelve ki a dobozból ezek mind kék színűek lesznek. Ahhoz, hogy biztosan legyen a kihúzottak között 2 különböző színű golyó, legkevesebb 12 golyót kell kivenni a dobozból.

c) Ahhoz, hogy 3 különböző színű golyót húzzunk ki, meghatározzuk, hogy melyik két színből van a legtöbb golyó. A piros és sárga golyók összege 13, a piros és kék golyók összege 16, a sárga és kék golyók összege 19. Ha csak 19 golyót húzunk ki, még nem biztos, hogy a kiemelt golyók között 3 különböző színű van. Tehát legkevesebb 20 golyót kell kivenni a dobozból, hogy biztosan legyen közöttük 3 különböző színű golyó.

Felelet:

a) Legkevesebb 20 golyót kell kihúzni a dobozból ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük piros golyó.

b) Legkevesebb 12 golyót kell kihúzni a dobozból ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük 2 különböző színű golyó.

c) Legkevesebb 20 golyót kell kihúzni a dobozból ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük 3 különböző színű golyó.

Pontozás:

a) 1 pont: a nem piros golyók számának a meghatározása
2 pont: annak meghatározása, hogy legkevesebb hány golyót kell kivenni a dobozból ahhoz, hogy a kihúzottak között biztosan legyen piros színű golyó

b) 1 pont: a legtöbb azonos színű golyók számának a meghatározása
2 pont: annak meghatározása, hogy legkevesebb hány golyót kell kivenni a dobozból ahhoz, hogy a kihúzottak között biztosan legyen 2 különböző színű golyó

c) 1 pont: a legtöbb, két azonos színű golyók számának a meghatározása
2 pont: annak meghatározása, hogy legkevesebb hány golyót kell kivenni a dobozból ahhoz, hogy a kihúzottak között biztosan legyen 3 különböző színű golyó
3 pont: a helyes feleletek felírása (1 pont/felelet)

Összpontszám: 12 pont

5. feladat

A 2024. évi nyári olimpiai játékokon a férfi vízilabdatornán 12 nemzet csapata vett részt. A csapatokat két csoportba sorolták: 6 csapat az A csoportba, 6 csapat a B csoportba került. A csapatok a csoportokon belül körmérkőzést játszottak, azaz minden csapat egyszer játszott minden csapattal. A mérkőzés végén a győztes csapat 3 pontot kapott, a vesztes csapat nem kapott pontot, döntetlen mérkőzés esetén mindkét csapat 1-1 pontot szerzett.

a) Hány mérkőzést játszottak le az A csoportban összesen?

b) A körmérkőzések után Anna elmondta Istvánnak, hogy a B csoportban a következő pontszámokat kapták a csapatok: 15, 10, 9, 5, 2 és 1. Írd le, melyik csapat hány mérkőzést nyert meg, vagy veszített el! Hány döntetlen mérkőzést játszottak a B csoportban?

Válaszaid indokold!

5. feladat megoldása:

a) Az A csoportban 6 csapat volt. A körmérkőzés során minden csapat 5-5 ellenféllel mérkőzött meg. Mivel minden csapat csak egyszer játszott ugyanazzal az ellenféllel, a lejátszott meccsek száma: $6 \times 5 : 2 = 30 : 2 = 15$.

b) 1. megoldás:

Mivel a B csoportban is 6 csapat volt, mindegyik csapat 5-5 mérkőzést kellett lejátsszon. Jelöljük a B csoportban lévő csapatokat a szerzett pontszámaik alapján: I. csapat (15 pont), II. csapat (10 pont), III. csapat (9 pont), IV. csapat (5 pont), V. csapat (2 pont) és VI. csapat (1 pont).

- Az I. csapat 15 pontot szerzett, minden mérkőzést megnyert, mert 3 x 5 = 15. A többi csapat ezekre a mérkőzésekre 0 pontot kapott.
- A VI. csapatnak 1 pontja van, így egy döntetlen mérkőzést játszott, a többit elveszítette. Mivel az V. csapatnak 2 pontja van, így az V. és a VI. csapat egymással csak döntetlent játszhatott. Tehát a VI. csapat vereséget szenvedett az I., a II., a III. és a IV. csapattól.
- Az V. csapat két döntetlent játszott, és három vereséget szenvedett el. Egyik döntetlen mérkőzése a VI. csapattal volt, a másik a II., a III. vagy a IV. csapattal lehetett. A IV. csapat nyert a VI. csapattal szemben. Mivel pontszáma 5, nem nyerhette meg az V. csapattal vívott mérkőzést, tehát az V. és a IV. csapat mérkőzésének eredménye döntetlen volt.
- A IV. csapatnak 5 pontja van. Ha tudjuk, hogy vesztített az I. csapattal szemben, döntetlen mérkőzést játszott az V. csapattal, és megnyerte a VI. csapattal játszott mérkőzést, akkor még egy döntetlen mérkőzést kellett játsszon. A döntetlen mérkőzést csak a II. csapattal játszhatta.

Tehát a mérkőzések állása:

- Az I. csapat 5 mérkőzést nyert meg.
- A II. csapat 3 mérkőzést nyert meg *(egyet a III., egyet az V. és egyet a VI. csapattal szemben)*, egy döntetlen mérkőzést játszott *(a IV. csapattal),* és egy vereséget szenvedett *(az I. csapattól).*

- A III. csapat szintén 3 mérkőzést nyert meg *(egyet a IV., egyet az V. és egyet a VI. csapattal szemben)*, és két vereséget szenvedett *(egyet az I. és egyet a II. csapattól)*.
- A IV. csapat egy mérkőzést nyert meg *(a VI. csapattal szemben)*, két döntetlen mérkőzést játszott *(egyet a II. és egyet az V. csapattal)*, valamint két vereséget szenvedett *(egyet az I. és egyet a III. csapattal vívott mérkőzésen)*.
- Az V. csapat 2 döntetlen mérkőzést játszott *(egyet a IV. és egyet a VI. csapattal)*, 3-szor szenvedett vereséget *(az I., a III. és a IV. csapatokkal vívott mérkőzéseken)*.
- A VI. csapat egy döntetlen mérkőzést játszott *(az V. csapattal)*, és 4-szer szenvedett vereséget *(az I., a II., a III. és a IV. csapattal vívott mérkőzéseken)*.

Tehát három döntetlen mérkőzés volt a B csoportban.

2. megoldás:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
I. (15 p)		3	3	3	3	3
II. (10 p)	0		3	**1**	3	3
III. (9 p)	0	0		3	3	3
IV. (5 p)	0	1	0		**1**	3
V. (2 p)	0	0	0	1		**1**
VI. (1 p)	0	0	0	0	1	

3. megoldás:

Mivel a B csoportban 6 csapat volt, minden csapat 5-5 mérkőzést játszott.

A győztes csapat 3 pontot, a vesztes csapat 0 pontot kapott, döntetlen mérkőzés esetén mindkét csapat 1-1 pontot szerzett.

A pontszámokat táblázatba foglaljuk. Minden mérkőzést két csapathoz írunk be (a mérkőzés során egy csapat vagy nyert, vagy veszített, döntetlen esetében mindkét csapat döntetlent játszott). Így a táblázat kitöltésekor arra kell figyelni, hogy a megnyert és a vesztes mérkőzések száma megegyezzen, és a döntetlen mérkőzések száma páros legyen.

Csapat	Mérkőzések száma			Pontszám
	megnyert	döntetlen	vesztes	
I.	5	0	0	$5 \times 3p = 15p$
VI.	0	1	4	$1 \times 1p + 4 \times 0p = 1p$
V.	0	2	3	$2 \times 1p + 3 \times 0p = 2p$
II.	3	1	1	$3 \times 3p + 1 \times 1p + 1 \times 0p = 10p$
III.	3	0	2	$3 \times 3p + 2 \times 0p = 9p$
IV.	1	2	2	$1 \times 3p + 2 \times 1p + 2 \times 0p = 5p$

Tehát döntetlen mérkőzésekért összesen 6 pontot osztottak ki. Mivel minden döntetlen mérkőzésen mindkét csapat szerzett 1-1 pontot, így $6: 2 = 3$ döntetlen mérkőzés volt a B csoportban.

Felelet:

a) Az A csoportban 15 mérkőzést játszottak.

b) 3 döntetlen mérkőzést játszottak a B csoportban.

Pontozás:

a) 2 pont: a mérkőzések számának helyes meghatározása
   2 pont: helyes indoklás

b) 2 pont: a döntetlen mérkőzések számának helyes meghatározása
   3 pont: helyes indoklás
   2 pont: a helyes feleletek felírása (1 pont/felelet)

Összpontszám: 11 pont